Première S : Les contrôles et corrigés

O. Lader

Table des matières

Devoir maison 1 : Polynômes du second degré et droites

pour le lundi 30 novembre 2015

Exercice 1. Résoudre les équations/inéquations suivantes :

1. $\frac{x-1}{2x-5} = \frac{x+1}{x-1}$;
2. $4x^4 + 11x^2 - 3 = 0$;
3. $\frac{3x^2+x+1}{x^2-3x-10} < 0$.

Exercice 2. Pierre et Pauline se rendent à la station-service et font chacun le plein de leur véhicule.
Pierre prend du gasoil et Pauline de l'essence.
Le litre de gasoil est 20 centimes moins cher que celui de l'essence.
Chacun d'eux paye 57,20 euros et Pierre prend 8 litres de carburant de plus de Pauline.
Combien de litres de gasoil Pierre a-t-il acheté ?

Exercice 3. Soit un triangle RST et K le milieu de $[RS]$.

1. Construire les points H et L tels que $\overrightarrow{TH} = -3\,\overrightarrow{TR}$ et $\overrightarrow{SL} = -2\,\overrightarrow{ST}$.
2. Montrer que $\overrightarrow{TR} + \overrightarrow{TS} = 2\,\overrightarrow{TK}$.
3. Décomposer le vecteur $\overrightarrow{HL}$ sur $\overrightarrow{TR}$ et $\overrightarrow{TS}$.
4. En déduire que $\frac{1}{6}\overrightarrow{HL} = \overrightarrow{TK}$.
5. Est-ce que les droites (HL) et (TK) sont parallèles ?

Exercice 4. Les droites d_1, d_2, d_3 et d_4 ont pour équations cartésiennes respectives :

$$d_1 :\ 6x + 9y + 18 = 0 \qquad d_2 :\ 4x + 6y - 5 = 0$$
$$d_3 :\ 5x - y + 15 = 0 \qquad d_4 :\ \frac{2}{\sqrt{3}}\,x + \sqrt{3}\,y + 2\sqrt{3} = 0$$

1. a) Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ?
   b) Même question avec d_1 et d_3, puis avec d_1 et d_4.
2. a) Les droites d_1 et d_2 sont-elles confondues ?
   b) Même question avec d_1 et d_4.
3. Déterminer les coordonnées du point $M(x, y)$ d'intersection des droites d_1 et d_3.

Devoir maison 1 : Polynômes du second degré et droites

corrigé

Exercice 1. Résolvons les équations/inéquations suivantes :

1 pt 1. Notons que l'équation

$$\frac{x-1}{2x-5} = \frac{x+1}{x-1}$$

est définie lorsque les dénominateurs sont non nuls. Supposons donc que x est un nombre réel différent de $\frac{5}{2}$ et de 1. Alors, la précédente équation est équivalente à

$$\begin{array}{rcl} (x-1)^2 & = & (x+1)(2x-5) \\ x^2-2x+1 & = & 2x^2-5x+2x-5 \\ 0 & = & x^2-x-6 \end{array}$$

Le discriminant $\Delta = (-1)^2 - 4\times 1\times(-6) = 25 > 0$ et donc l'équation admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{-(-1)-\sqrt{25}}{2} = -2 \qquad \text{et} \qquad x_2 = 3$$

Remarque : On note qu'on a pu garder les deux solutions car elles sont différentes de $\frac{5}{2}$ et 1 (les deux valeurs "interdites").

2 pt 2. Pour résoudre $4x^4+11x^2-3=0$, posons $t=x^2$. Alors, t vérifie l'équation $4t^2+11t-3=0$. Le discriminant de l'équation est $\Delta = 121+4\times4\times3 = 169 = 13^2 > 0$. D'où, deux solutions $t_1 = \frac{-11-13}{8} = -3 < 0$ et $t_2 = \frac{-11+13}{8} = \frac{1}{4} > 0$. En revenant à la relation entre t et x, on en déduit que $x^2 = \frac{1}{4}$ nécessairement. Ainsi, l'équation admet deux solutions $x_1 = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ et $x_2 = -\frac{1}{2}$.

2 pt 3. Résoudre l'inéquation $\frac{3x^2+x+1}{x^2-3x-10} < 0$ revient à étudier le signe de la fraction à gauche du symbole d'inégalité. On note que le discriminant du numérateur est $\Delta = 1-4\times3 = -11 < 0$, ainsi $3x^2+x+1 > 0$ (du signe du coefficient dominant, ici $a=3$) quel que soit le nombre réel x.
Le discriminant du dénominateur est $\Delta = 49$ et $x_1 = \frac{3-7}{2} = -2$ et $x_2 = 5$. D'où, pour tout nombre réel x,

$$x^2-3x-10 = (x+2)(x-5)$$

On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
$3x^2+x+1$		$+$	|	$+$	|	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-5$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$x^2-3x-10$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\frac{3x^2+x+1}{x^2-3x-10}$		$+$	||	$-$	||	$+$	

et l'ensemble des solutions de l'inéquation est l'intervalle $]-2;5[$.

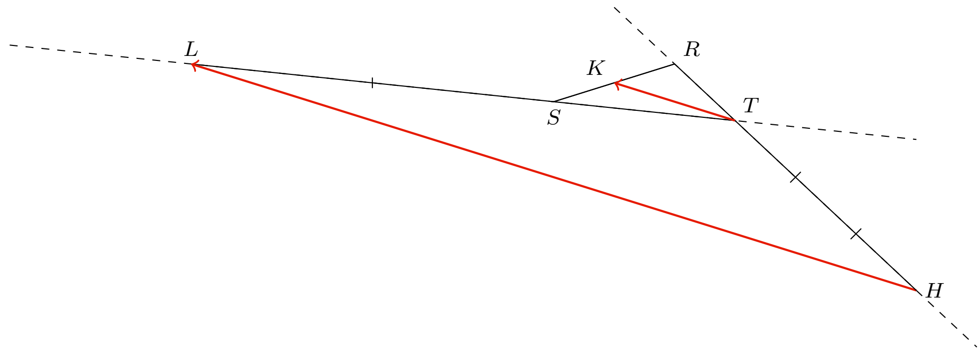
3 pt **Exercice 2.** Rappelons que Pierre prend du gasoil et Pauline de l'essence. Notons p le prix du litre de gasoil, alors $p+0.2$ est le prix de l'essence. Chacun d'eux paye 57,20 euros. Pierre a donc pris $\frac{57,2}{p}$ litres de gasoil et Pauline a pris $\frac{57,2}{p+0.2}$ litres d'essence. Comme Pierre prend 8 litres de carburant de plus que Pauline, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{57,2}{p} &= \frac{57.2}{p+0.2}+8\\
57.2(p+0.2) &= 57.2p+8p(p+0.2)\\
57.2p+11.44 &= 57.2p+8p^2+1.6p\\
0 &= 8p^2+1.6p-11.44
\end{aligned}$$

Le discriminant est $\Delta = 368.64$ et $p_1 = -1.3$ et $p_2 = 1.1$. On en déduit que le prix au litre du gasoil est $p = 1.1$ et Pierre a acheté $\frac{57.2}{1.1} = 52$ litres de gasoil.

Exercice 3. Soit un triangle RST et K le milieu de $[RS]$.

1 pt 1. Construire les points H et L tels que $\overrightarrow{TH} = -3\,\overrightarrow{TR}$ et $\overrightarrow{SL} = -2\,\overrightarrow{ST}$.



1 pt 2. En utilisant la relation de Chasles, on note que

$$\overrightarrow{TR}+\overrightarrow{TS} = \overrightarrow{TK}+\overrightarrow{KR}+\overrightarrow{TK}+\overrightarrow{KS} = 2\,\overrightarrow{TK}+\overrightarrow{KR}+\overrightarrow{KS}$$

Par construction, K est le milieu du segment $[SR]$, donc la somme $\overrightarrow{KR}+\overrightarrow{KS}$ est nulle et ainsi, $\overrightarrow{TR}+\overrightarrow{TS} = 2\,\overrightarrow{TK}$.

1 pt 3. En utilisant les relations caractérisant les points L et H, décomposons le vecteur $\overrightarrow{HL}$ sur $\overrightarrow{TR}$ et $\overrightarrow{TS}$:

$$\overrightarrow{HL} = \overrightarrow{HT}+\overrightarrow{TS}+\overrightarrow{SL} = -\overrightarrow{TH}+\overrightarrow{TS}-2\,\overrightarrow{ST} = -(-3)\,\overrightarrow{TR}+\overrightarrow{TS}+2\,\overrightarrow{TS} = 3\,\overrightarrow{TR}+3\,\overrightarrow{TS}$$

1 pt 4. Notons que d'après la question 2, on a $\overrightarrow{TK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{TR}+\overrightarrow{TS}) = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{TR}+\frac{1}{2}\,\overrightarrow{TS}$. D'où, de la question précédente, on déduit que

$$\frac{1}{6}\overrightarrow{HL} = \frac{1}{6}(3\,\overrightarrow{TR}+3\,\overrightarrow{TS}) = \frac{3}{6}\,\overrightarrow{TR}+\frac{3}{6}\,\overrightarrow{TS} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{TR}+\frac{1}{2}\,\overrightarrow{TS} = \overrightarrow{TK}$$

1 pt 5. De la question précédent, on déduit que, par définition, les vecteurs $\overrightarrow{HL}$ et $\overrightarrow{TK}$ sont colinéaires. D'où les droites (HL) et (TK) sont parallèles.

Exercice 4. Les droites d_1, d_2, d_3 et d_4 ont pour équations cartésiennes respectives :

$d_1 :\ 6x+9y+18=0$ $\qquad d_2 :\ 4x+6y-5=0$

$d_3 :\ 5x-y+15=0$ $\qquad d_4 :\ \frac{2}{\sqrt{3}}\,x+\sqrt{3}\,y+2\sqrt{3}=0$

1 pt 1. a) Les vecteurs $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs des droites d_1 et d_2 respectivement. Leur déterminant est $-9 \times 4 - (-6) \times 6 = 0$, ainsi, on en déduit que les vecteurs directeurs respectifs sont colinéaires et donc que les droites d_1 et d_2 sont parallèles.

1 pt b) De même, les vecteurs $\overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v_4} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs des droites d_3 et d_4 respectivement.
Le déterminant de $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_3}$ est $-9 \times 5 - 1 \times 6 = -51 \neq 0$, d'où on déduit que d_1 et d_3 sont sécantes.
Rappelons que $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Le déterminant de $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_4}$ est

$$-9 \times \frac{2}{\sqrt{3}} - (-\sqrt{3}) \times 6 = -9 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} \times 6 = \sqrt{3}(-6+6) = 0$$

D'où les droites d_1 et d_4 sont parallèles.

1 pt 2. a) On note que le point $A(0,-2)$ appartient à d_1 car $6 \times 0 + 9 \times (-2) + 18 = 0$. Par contre $4 \times 0 + 6 \times (-2) - 5 = -17 \neq 0$ et donc A n'appartient pas à la droite d_2. Ainsi, les droites d_1 et d_2 ne sont pas confondues.

1 pt b) On va multiplier l'équation caractérisant d_2 par $3\sqrt{3}$:

$$\begin{aligned}
&\iff \quad \frac{2}{\sqrt{3}}\,x + \sqrt{3}\,y + 2\sqrt{3} = 0 \\
&\iff \quad 3\sqrt{3}\frac{2}{\sqrt{3}}\,x + 3\sqrt{3} \times \sqrt{3}\,y + 3\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} = 0 \\
&\iff \quad 6\,x + 9\,y + 18 = 0
\end{aligned}$$

Donc l'équation d_4 est équivalente à d_1 (elles admettent les mêmes solutions). C'est-à-dire les droites d_1 et d_4 sont confondues.

2 pt 3. Soit $M(x,y)$ le point d'intersection des droites d_1 et d_3, alors x et y vérifient simultanément les équations caractérisant d_1 et d_3. C'est-à-dire

$$\begin{cases} 6x + 9y + 18 & = 0 \\ 5x - y + 15 & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x + 9y + 18 & = 0 \\ 5x + 15 & = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x + 9(5x+15) + 18 & = 0 \\ y & = 5x + 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 51x + 153 & = 0 \\ y & = 5x + 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & = \frac{-153}{51} = -3 \\ y & = 5 \times (-3) + 15 = 0 \end{cases}$$

Donc le point $M(-3;\,0)$ est le point d'intersection des droites d_1 et d_3.

Devoir sur table 1 : Polynôme du second degré et droites

mercredi 2 décembre 2015

On prendra soin de justifier toutes les réponses.

Exercice 1.

1. Résoudre l'équation $-x^2 + \sqrt{2}x + 1 = 0$;
2. Rédoudre l'inéquation $(x^2 - 2x - 3)(x^2 + 2x + 2) < 0$;
3. On pose $X = x^2$. Exprimer x^4 en fonction de X puis résoudre l'équation : $x^4 - 12x^2 + 27 = 0$.

Exercice 2. On se place dans le plan muni d'un repère. Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par le point $A(1;\,2)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ et $\mathcal{D}'$ la droite d'équation cartésienne $2x - y - 1 = 0$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$.
2. Est-ce que le point $B(2, 3)$ appartient à la droite $\mathcal{D}'$?
3. Est-ce que les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles ?
4. Déterminer les coordonnées de M, le point d'intersection des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.
5. Faire une figure avec les différents points et les deux droites.

Exercice 3 (facultatif)**.** Soit $x^2 + bx + c$ un polynôme du second degré avec $a = 1$. Supposons que son discriminant est strictement positif.

1. Rappeler, dans ce cas, la forme factorisée de $x^2 + bx + c = \ldots$.
2. En développant la forme factorisée, démontrer que la somme de ses deux racines est égale à $-b$. Que peut-on dire dire du produit des racines ?

Devoir sur table 1 : Polynôme du second degré et droites

corrigé

Exercice 1.

1. Le discriminant de l'équation $-x^2 + \sqrt{2}x + 1 = 0$ est $\Delta = (\sqrt{2})^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 6$. Ainsi, l'équation du second degré admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{-2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}$$

2. Résolvons l'inéquation $(x^2 - 2x - 3)(x^2 + 2x + 2) < 0$: Le discriminant du premier facteur est $\Delta = 16$ et

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{16}}{2} = -1 \qquad \text{et} \qquad x_2 = 3$$

D'où $x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$. Le discriminant de second facteur est $\Delta = 2^2 - 4 \times 2 = -4$, d'où l'on déduit que $x^2 + 2x + 2$ est du signe du coefficient dominant $a = 1$ pour tout réel x. Ainsi,

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-3$		$-$	|	$-$	0	$+$	
x^2-2x-3		$+$	0	$-$	0	$+$	
x^2+2x+2		$+$	|	$+$	|	$+$	
$(x^2-2x-3)(x^2+2x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

D'où, l'ensemble solution de l'inéquation est l'intervalle $]1; 3[$.

3. On pose $X = x^2$, alors $x^4 = (x^2)^2 = X^2$. L'équation : $x^4 - 12x^2 + 27 = 0$ peut se réécrire $X^2 - 12X + 27 = 0$. Cette seconde équation admet deux solutions $X_1 = 3$ et $X_2 = 9$. On en déduit que si le nombre réel x est solution de $x^4 - 12x^2 + 27 = 0$, alors

$$x^2 = 3 \qquad \text{ou} \qquad x^2 = 9$$

D'où, les solutions de l'équation sont -3, $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ et 3.

Exercice 2. On se place dans le plan muni d'un repère. Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par le point $A(1; 2)$ et de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{D}'$ la droite d'équation cartésienne $2x - y - 1 = 0$.

1. Par identification $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$, on déduit que la droite $\mathcal{D}$ admet une équation cartésienne de la forme $x + 3y + c = 0$. Comme la droite passe par $A(1; 2)$, on a $1 + 3 \times 2 + c = 0$, $c = -7$. D'où

$$\mathcal{D} : \qquad x + 3y - 7 = 0$$

2. On note que $2 \times 2 - 3 - 1 = 0$, d'où le point $B(2, 3)$ appartient à la droite $\mathcal{D}'$.

3. Le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$ et le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est

$$-3 \times 2 - 1 \times 1 = -7 \neq 0$$

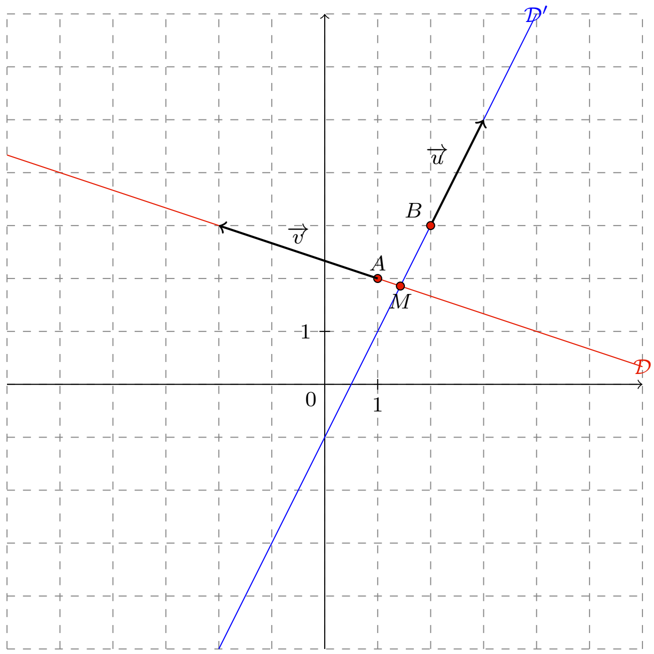
Ainsi, les vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires et les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas parallèles.

4. Soit $M(x;\, y)$ le point d'intersection des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, alors

$$\begin{cases} x + 3y - 7 &= 0 \\ 2x - y - 1 &= 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x &= -3y + 7 \\ 2(-3y + 7) - y - 1 &= 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x &= -3y + 7 \\ -6y + 14 - y - 1 &= 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x &= -3y + 7 \\ -7y &= -13 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x &= -3 \times \frac{13}{7} + 7 = \frac{10}{7} \\ y &= \frac{13}{7} \end{cases}$$

C'est-à-dire $M(\frac{10}{7};\ \frac{13}{7})$.

5. Voici la figure correspondante :



Exercice 3. Soit $x^2 + bx + c$ un polynôme du second degré. Supposons que son discriminant est strictement positif. Montrons que la somme de ses deux racines est égale à $-b$. D'après une propriété vue en cours, on peut écrire le polynôme sous forme factorisé :

$$x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2$$

En identifiant les coefficients devant x, on a bien

$$-b = x_1 + x_2$$

De plus, en identifiant les coefficients constants, on a

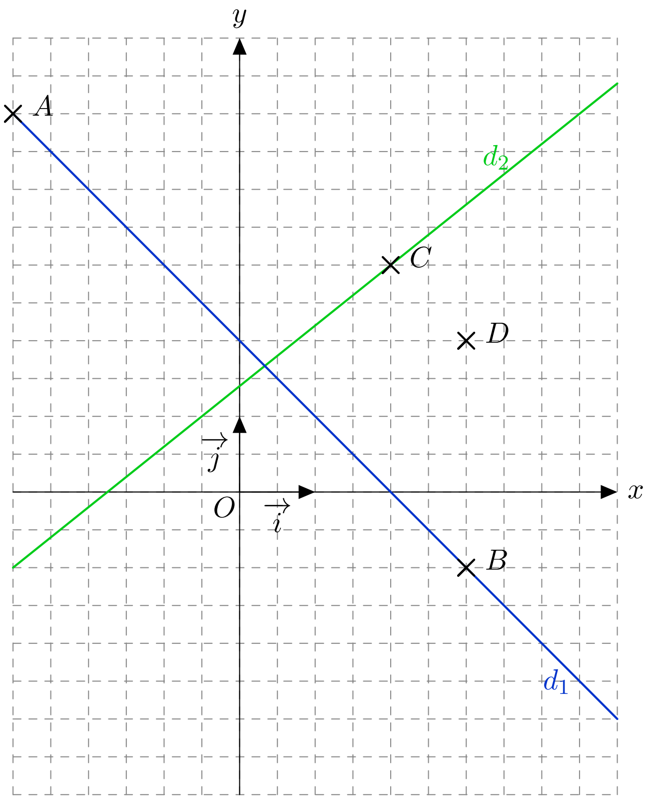
$$c = x_1 x_2$$

C'est-à-dire le produit des racines est égal au coefficient constant.

Devoir maison 2 : Droites, trigonométrie et fonctions

pour le jeudi 17 décembre 2015

Exercice 1. On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit $A(-3;5)$, $B(3;-1)$, $C(2;3)$ et $D(3;2)$ quatres points du plan, on note d_1 la droite passant par A et B. Soit d_2 la droite d'équation cartésienne $\frac{4}{5}x - y + \frac{7}{5} = 0$.

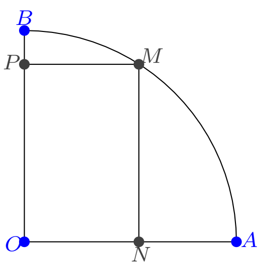


1. Est-ce que le point C appartient à la droite d_2 ? Justifier.
2. Est-ce que le point D appartient à la droite d_2 ? Justifier.
3. Déterminer un vecteur directeur de la droite d_2.
4. Déterminer une équation cartésienne de la droite d_1.
5. Montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
6. Quelle est la nature du quadrilatère $ABDC$?

Exercice 2.

1. Calculer $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$.
2. En déduire $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$.
3. Calculer $\cos(\frac{-\pi}{12})$.

Facultatif **Exercice 3** (Aire d'un rectangle)**.** Le point M est situé sur un quart de cercle de centre O, de rayon 4 et d'extrémités A et B. Le point N est le pied de la perpendiculaire à la droite (OA) passant par M. Le point P est le pied de la perpendiculaire à la droite (OB) passant par M.



On pose $x = ON$ et on désigne par $f(x)$ l'aire du rectangle OMNP.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de la fonction f.
2. Montrer que, pour tout x de $\mathcal{D}$, $f(x) = x\sqrt{16 - x^2}$.
3. a) Vérifier que, pour tout x de $\mathcal{D}$, on a :

$$f(x) = \sqrt{64 - (x^2 - 8)^2}$$

   b) En déduire que le maximum de f vaut 8.
   En quelle valeur est-il atteint ?

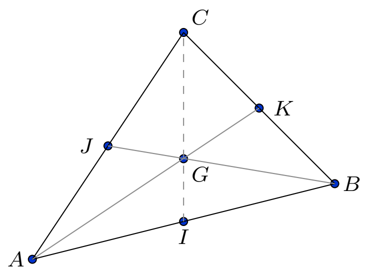
   c) Que peut-on dire du rectangle ONMP lorsque son aire est maximale ?
4. a) À l'aide de la définition d'une fonction décroissante, montrer que la fonction u définie par $u(x) = (x^2 - 8)^2$ est décroissante sur l'intervalle $[0; 2\sqrt{2}]$.

   b) En déduire le sens de variation de f sur $[0; 2\sqrt{2}]$.

   c) Étudier les variations de f sur l'intervalle $[2\sqrt{2}; 4]$.

   d) Construire le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0; 4]$.
5. Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[0; 4]$.

Facultatif **Exercice 4** (Le centre de gravité d'un triangle)**.** On considère un triangle quelconque ABC. Soit I, J et K les milieux des segments $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$ respectivement.



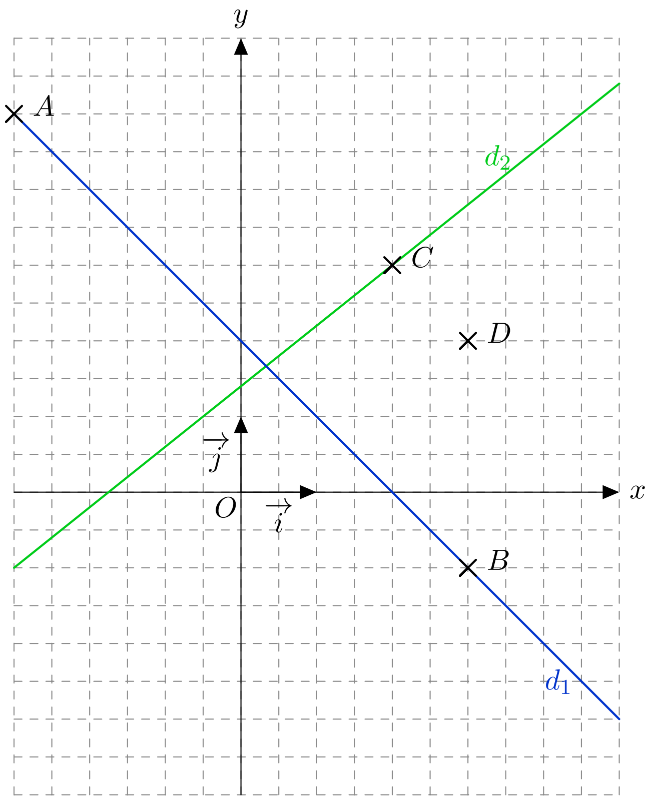
On se place dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

1. Déterminer les coordonnées des points A, B, C, I, J et K.
2. Vérifier que A et K appartiennent à la droite d'équation cartésienne $x - y = 0$.
   En déduire que $x - y = 0$ est une équation cartésienne de la droite (AK).
3. Déterminer une équation cartésienne de la droite (BJ).
4. Soit $G(x;\ y)$ le point d'intersection de la droite (AK) et (BJ). Déterminer les coordonnées $(x; y)$.
5. Déterminer une équation cartésienne de la droite (CI).
6. En déduire que les médianes du triangle ABC sont concourantes en le point G, appelé centre de gravité.

Devoir maison 2 : Droites, trigonométrie et fonctions

corrigé

Exercice 1. On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit $A(-3;5)$, $B(3;-1)$, $C(2;3)$ et $D(3;2)$ quatres points du plan, on note d_1 la droite passant par A et B. Soit d_2 la droite d'équation cartésienne $\frac{4}{5}x - y + \frac{7}{5} = 0$.



1 pt 1. Le point C appartient à la droite d_2, car $\frac{4}{5} \times 2 - 3 + \frac{7}{5} = 0$.

1 pt 2. Le point D n'appartient pas à la droite d_2, car $\frac{4}{5} \times 3 - 2 + \frac{7}{5} = \frac{9}{5} \neq 0$.

1 pt 3. D'après une proposition du cours, connaissant une équation cartisienne de la droite d_2, un vecteur directeur de la droite d_2 est le vecteur $\vec{v}_2$ de coordonnées $\begin{pmatrix} -(-1) \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$.

   Remarque : Pour éviter les fractions, on aurait pu mulitplier le précédent vecteur par 5 : $5\vec{v}_2 = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

2 pt 4. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est de coordonnées $\begin{pmatrix} 3-(-3) \\ -1-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$, ainsi une équation cartésienne de la droite (AB) est de la forme : $-6x - 6y + c = 0$ où c est un nombre réel que nous allons encore déterminer. Comme $A \in (AB)$, on a

$$-6 \times (-3) - 6 \times 5 + c = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad c = 12$$

D'où, une équation cartésienne de la droite (AB) est $-6x - 6y + 12 = 0$.
On pourrait éventuellement divisier par -6 pour obtenir l'équation plus élémentaire : $x + y - 2 = 0$.

1 pt 5. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CD}$ sont $\begin{pmatrix} 3-2 \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ainsi, le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ est

$$6 \times (-1) - 1 \times (-6) = 0$$

On en déduit que les vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires et ainsi les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

1 pt 6. De la question précédente, comme deux côtés opposés du quadrilatère sont parallèles, on en déduit que le quadrilatère $ABDC$ est un trapèze.

Exercice 2.

1 pt 1. On note que $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{4-3}{12}\pi = \frac{\pi}{12}$.

1 pt 2. En utilisant les formules de trigonométrie, on déduit que

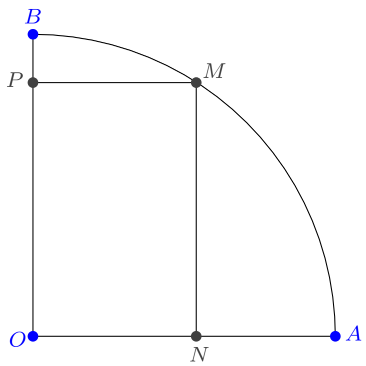
$$\cos(\frac{\pi}{12}) = \cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{3})\cos(\frac{\pi}{4}) + \sin(\frac{\pi}{3})\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

et

$$\sin(\frac{\pi}{12}) = \sin(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{3})\cos(\frac{\pi}{4}) - \cos(\frac{\pi}{3})\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

1 pt 3. En utilisant encore une fois les formules de trigonométrie, on a $\cos(\frac{-\pi}{12}) = \cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

Exercice 3 (Aire d'un rectangle)**.** Le point M est situé sur un quart de cercle de centre O, de rayon 4 et d'extrémités A et B. Le point N est le pied de la perpendiculaire à la droite (OA) passant par M. Le point P est le pied de la perpendiculaire à la droite (OB) passant par M.



On pose $x = ON$ et on désigne par $f(x)$ l'aire du rectangle OMNP.

1. L'aire n'a de sens que si le point N se trouve sur le segment $[OA]$ de longueur 4. Ainsi, le domaine de définition de la fonction f est $\mathcal{D} = [0; 4]$.
2. Comme M se trouve sur le cercle de centre O et rayon 4, on a que $ON^2 + OP^2 = 4^2$. D'où $OP = \sqrt{16 - x^2}$ et
$$f(x) = x\sqrt{16 - x^2}$$
pour tout x de $\mathcal{D}$.
3. a) Soit x de $\mathcal{D}$, comme x est positif, on a que $x = \sqrt{x^2}$, ainsi en utilisant le fait que la racine d'un produit est le produit des racines, on a
$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x^2}\sqrt{16 - x^2} \\ &= \sqrt{x^2(16 - x^2)} \\ &= \sqrt{-(x^4 - 2 \times 8 \times x^2)} \\ &= \sqrt{-(x^4 - 2 \times 8 \times x^2 + 8^2) + 64} \end{aligned}$$
En utilisant les identités remarquables, on déduit que
$$f(x) = \sqrt{64 - (x^2 - 8)^2}$$
b) Notons que pour tout x dans $\mathcal{D}$, $(x^2 - 8)^2 \geq 0$, ainsi $64 - (x^2 - 8)^2 \leq 64$. D'autre part, la fonction racine carrée est croissante, c'est-à-dire elle conserve l'ordre, on en déduit que
$$f(x) = \sqrt{64 - (x^2 - 8)^2} \leq \sqrt{64} = 8$$
D'où le maximum de f vaut 8 et il est atteint (lorsque $(x^2 - 8)^2$ s'annule) en $x = \sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}$.

c) Lorsque l'aire du rectangle OMNP est maximale, c'est-à-dire lorsque x est égal à $2\sqrt{2}$, on note que
$$OP = \sqrt{16 - (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{8} = ON$$
D'où, dans ce cas, le quadrilatère OMNP est un carré.

4. a) Soient x_1, x_2 deux nombres réels dans $[0;2\sqrt{2}]$. Supposons que $x_1 < x_2$, alors

$$\begin{aligned}
& u(x_1) - u(x_2) \\
= \; & (x_1^2-8)^2 - (x_2^2-8)^2 \\
= \; & (x_1^2 - 8 + x_2^1 - 8)(x_1^2 - 8 - x_2^2 + 8) \\
= \; & (x_1^2 + x_2^2 - 16)(x_1+x_2)(x_1-x_2)
\end{aligned}$$

Par hypothèse, $x_1^2 \leq (2\sqrt{2})^2 = 8$ d'où on déduit que $x_1^2 - 8 \leq 0$ et de même $x_2^2 - 8 \leq 0$. D'où $x_1^2 + x_2^2 - 16 = (x_1^2 - 8) + (x_2^2 - 8) \leq 0$. Ainsi, on a

$$u(x_1) - u(x_2) = \underbrace{(x_1^2 + x_2^2 - 16)}_{\leq 0}\underbrace{(x_1+x_2)}_{\geq 0}\underbrace{(x_1-x_2)}_{\leq 0} \geq 0$$

Donc, $u(x_1) \geq u(x_2)$ et u est décroissante sur l'intervalle $[0;2\sqrt{2}]$.
Autre solution : (ici on utilise les opérations sur les fonctions)
La fonction polynôme de degré deux $v(x) = x^2 - 8$ est croissante sur l'intervalle $[0;2\sqrt{2}]$ et à valeurs négatives (dans l'intervalle $]-\infty, 0]$). Ainsi, comme la fonction carrée est décroissante sur l'intervalle $]-\infty,0]$, la fonction $u(x) = (x^2-8)^2 = (v(x))^2$ a le sens de variation contraire de celui de $v(x)$. C'est-à-dire u est décroissante sur l'intervalle $[0;2\sqrt{2}]$.

b) Nous allons en déduire les variations de f :

x	0		$2\sqrt{2}$
$u(x)$	64	$\searrow$	0
$64 - u(x)$	0	$\nearrow$	64
$f(x)$	0	$\nearrow$	8

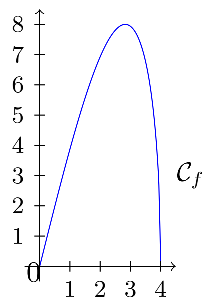
c) En reprenant, le raisonnement de la question 4.a), on montre que u est croissante sur l'intervalle $[2\sqrt{2};4]$ (la raison du changement de sens de variation provient du fait que $x^2 - 8 \geq 0$ et la fonction carrée est croissante sur $[0;+\infty])$. Ensuite, de même, on en déduit que f est décroissante sur $[2\sqrt{2};4]$:

x	$2\sqrt{2}$		4
$u(x)$	0	$\nearrow$	64
$64 - u(x)$	64	$\searrow$	0
$f(x)$	8	$\searrow$	0

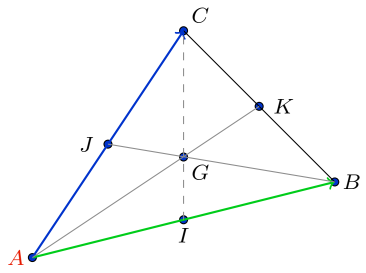
d) Résumons :

x	0		$2\sqrt{2}$		4
$f(x)$	0	$\nearrow$	8	$\searrow$	0

5. Enfin, le graphe de la fonction f sur l'intervalle $[0;4]$:



Exercice 4 (Le centre de gravité d'un triangle)**.** On considère un triangle quelconque ABC. Soit I, J et K les milieux des segments $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$ respectivement.



On se place dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

1. Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, on a $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(0;1)$, $I(\frac{1}{2};0)$, $J(0;\frac{1}{2})$ et $K(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$. Précisons le calculs des coordonnées du point K :
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AK} &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BK}\\ &= \overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\\ &= \overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\\ &= (1-\frac{1}{2})\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$
Ici, nous avons utilisé la relation de Chasles et le fait que $\overrightarrow{BK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$
2. Il est immédiat que les coordonnées des points $A(0;0)$ et $K(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ vérifient l'équation $x-y=0$. D'autre part, par deux points (distincts), il passe une unique droite, d'où $x-y=0$ est une équation cartésienne de la droite (AK).
3. Les coordonnées du vecteur directeur $\overrightarrow{BJ}$ sont $\begin{pmatrix}-1\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$, ainsi une équation cartésienne de la droite (BJ) est de la forme : $\frac{1}{2}x+y+c=0$ et on a $\frac{1}{2}\times 1=-c$. D'où, une équation cartésienne de la droite (BJ) est
$$\frac{1}{2}x+y-\frac{1}{2}=0 \qquad \overset{\times 2}{\Longleftrightarrow} \qquad x+2y-1=0$$
4. Soit $G(x;\ y)$ le point d'intersection de la droite (AK) et (BJ). Alors, on a
$$\begin{aligned} &\begin{cases} x-y &=0\\ x+2y-1 &=0\end{cases}\\ \Longleftrightarrow\ &\begin{cases} x &=y\\ 3y &=1\end{cases}\\ \Longleftrightarrow\ &\begin{cases} x &=\frac{1}{3}\\ y &=\frac{1}{3}\end{cases}\end{aligned}$$
D'où, le point G est de coordonnées $(\frac{1}{3};\frac{1}{3})$.
5. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CI}$ sont $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -1\end{pmatrix}$ ainsi une équation cartésienne de la droite (CI) est
$$x+\frac{1}{2}y-(0+\frac{1}{2}\times 1)=0 \qquad \overset{\times 2}{\Longleftrightarrow} \qquad 2x+y-1=0$$

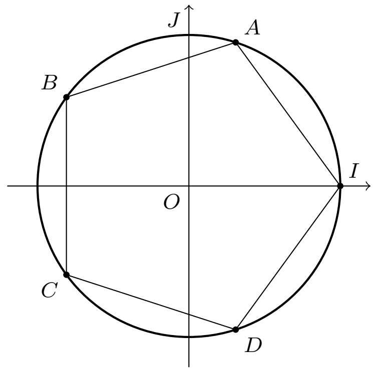
Remarque : Pour déterminer c, on a utilisé la relation $c = -ax_C - by_C$ comme C appartient à la droite (CI).

6. Notons que le point G appartient à la droite (CI) car $2 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - 1 = 0$. Ainsi, on en déduit que les médianes (AK), (BJ) et (CI) du triangle ABC sont concourantes en le point G, appelé centre de gravité.

Devoir sur table 2 : Droites, trigonométrie et fonctions de référence

jeudi 7 janvier 2016

Exercice 1. On considère les points A, B, C et D sur le cercle trigonométrique tels que le polygone $IABCD$ soit un pentagone régulier.



1. a) Déterminer une mesure des angles $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA})$, $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB})$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI})$.

   b) Déterminer les coordonnées des points A et B en fonction de cosinus et sinus d'angles.

2. On admet qu'on a la relation suivante :

$$\cos(\frac{4\pi}{5}) + \cos(\frac{2\pi}{5}) + \frac{1}{2} = 0 \qquad (\star)$$

   a) À l'aide de l'identité $(\star)$ et des formules de trigonométrie, montrer qu'on a

$$4\cos^2(\frac{2\pi}{5}) + 2\cos(\frac{2\pi}{5}) - 1 = 0$$

   b) Déterminer les racines de l'équation du second degré $4x^2 + 2x - 1 = 0$.

   c) En déduire que

$$\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

3. Calculer $\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{5}$.
4. Déterminer $\cos(\frac{11\pi}{15})$.

Formulaire:

1. $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$;
2. $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$;
3. $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$;
4. $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$;
5. $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$;
6. $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$.

Exercice 2. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

sur l'intervalle $[-10;\ 10]$.

1. Calculer $f(-1)$, $f(1)$, $f(-2)$, $f(2)$, $f(-3)$ et $f(3)$. Que peut-on conjecturer sur la fonction f ?
2. Démontrer votre conjecture.
3. Rappeler le sens de variation de la fonction inverse sur l'intervalle $]0;\ +\infty[$.
4. Rappeler le sens de variation de la fonction carrée sur l'intervalle $[0;\ +\infty[$.
5. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0;\ 10]$.
6. On admet que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[-10;\ 0]$. En déduire le tableau de variation de la fonction f.
7. Déterminer le maximum et le minimum de la fonction f.

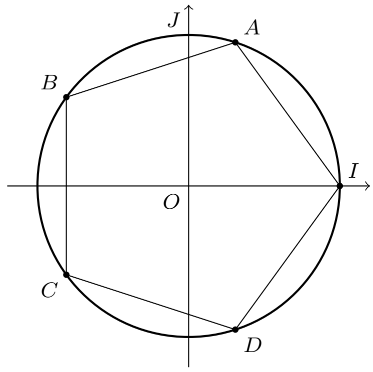
Exercice 3. On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé. Soit $A(1;\ 4)$ et $B(8;\ -2)$ deux points.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}_1$ parallèle à (OA) passant par B.
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}_2$ parallèle à (OB) passant par A.
3. Déterminer les coordonnées de D, point d'intersection des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.
4. (*) Quelle est la nature du quadrilatère $OBDA$?

Devoir sur table 2 : Droites, trigonométrie et fonctions de référence

corrigé

Exercice 1. On considère les points A, B, C et D sur le cercle trigonométrique tels que le polygone $IABCD$ soit un pentagone régulier.



1.5 pt

1. a) Le pentagone $IABCD$ est régulier, ainsi une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OI},\ \overrightarrow{OA})$ est $\frac{2\pi}{5}$.
D'après la relation de Chasles, $(\overrightarrow{OI},\ \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OI},\ \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}) = \frac{2\pi}{5} + \frac{2\pi}{5} = \frac{4\pi}{5}$.
Notons que le triangle OIA est isocèle en 0, ainsi

$$\pi = (\overrightarrow{OI},\ \overrightarrow{OA} + 2(\overrightarrow{AO},\ \overrightarrow{AI}) = \frac{2\pi}{5} + 2(\overrightarrow{AO},\ \overrightarrow{AI})$$

D'où

$$(\overrightarrow{AO},\ \overrightarrow{AI}) = \frac{1}{2}(\pi - \frac{2\pi}{5}) = \frac{3\pi}{10}.$$

En appliquant la relation de Chasles et le fait que les triangles OIA et OIB sont semblables, on déduit que

$$(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AI}) = (\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AO}) + (\overrightarrow{AO},\ \overrightarrow{AI}) = 2 \times \frac{3\pi}{10} = \frac{3\pi}{5}$$

0.5 pt

b) Par définition du cosinus et du sinus, on a $A(\cos(\frac{2\pi}{5});\ \sin(\frac{2\pi}{5}))$ et $B(\cos(\frac{4\pi}{5});\ \sin(\frac{4\pi}{5}))$.

2. On admet qu'on a la relation suivante :

$$\cos(\frac{4\pi}{5}) + \cos(\frac{2\pi}{5}) + \frac{1}{2} = 0 \qquad (\star)$$

1.5 pt

a) À l'aide de la formule de duplication, on a

$$\begin{aligned}
\cos(\frac{4\pi}{5}) + \cos(\frac{2\pi}{5}) + \frac{1}{2} &= 0\\
\cos(2 \times \frac{2\pi}{5}) + \cos(\frac{2\pi}{5}) + \frac{1}{2} &= 0\\
2\cos^2(\frac{2\pi}{5}) - 1 + \cos(\frac{2\pi}{5}) + \frac{1}{2} &= 0\\
2\cos^2(\frac{2\pi}{5}) + \cos(\frac{2\pi}{5}) - \frac{1}{2} &= 0\\
4\cos^2(\frac{2\pi}{5}) + 2\cos(\frac{2\pi}{5}) - 1 &= 0
\end{aligned}$$

1.5 pt b) Déterminons les racines de l'équation du second degré $4x^2+2x-1=0$: Le discriminant est $\Delta = b^2-4ac = 2^2-4\times 4\times(-1) = 20$ et $\sqrt{20} = \sqrt{4\times 5} = \sqrt{4}\times\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$. Ainsi, il y a deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-2\sqrt{5}}{2\times 4} = \frac{\cancel{2}(-1-\sqrt{5})}{\cancel{2}\times 4} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$

et

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

0.5 pt c) D'après la figure (ou plus précisément, comme $0 \leq \frac{2\pi}{5} \leq \frac{\pi}{2}$) $\cos(\frac{2\pi}{5}) \geq 0$. D'après la relation ($\star$), $\cos(\frac{2\pi}{5})$ est une racine de l'équation du seconde degré de la question 2.b). Or x_1 est négatif et x_2 est positif, d'où

$$\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

1 pt 3. $\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{5} = \frac{5\pi+3\times 2\pi}{3\times 5} = \frac{11\pi}{15}$.

1.5 pt 4. D'après les formules de trigonométrie et les questions précédentes, on a

$$\begin{aligned}\cos(\frac{11\pi}{15}) &= \cos(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{5})\\ &= \cos(\frac{\pi}{3})\times\cos(\frac{2\pi}{5}) - \sin(\frac{\pi}{3})\times\sin(\frac{2\pi}{5})\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{-1+\sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}\times\sin(\frac{2\pi}{5})\end{aligned}$$

D'après la figure, $\sin(\frac{2\pi}{5}) \geq 0$, d'où

$$\sin(\frac{2\pi}{5}) = \sqrt{1-\cos^2(\frac{2\pi}{5})} = \sqrt{1-\frac{(-1+\sqrt{5})^2}{4^2}} = \frac{\sqrt{16-(1-2\sqrt{5}+5)}}{4} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\cos(\frac{11\pi}{15}) &= \frac{1}{2}\times\frac{-1+\sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\\ &= \frac{1}{8}\left(-1+\sqrt{5}-\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)\end{aligned}$$

Formulaire:

1. $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$;
2. $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$;
3. $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)$;
4. $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$;
5. $\cos(2a) = \cos^2(a)-\sin^2(a) = 2\cos^2(a)-1 = 1-2\sin^2(a)$;
6. $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$.

Exercice 2. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

sur l'intervalle $[-10; 10]$.

1.5 pt 1. On note que $f(-1) = \frac{1}{2}$, $f(1) = \frac{1}{2}$, $f(-2) = \frac{1}{5}$, $f(2) = \frac{1}{5}$, $f(-3) = \frac{1}{10}$ et $f(3) = \frac{1}{1}0$.
On conjecture que pour tout x dans l'intervalle $[-10;\ 10]$, on a $f(-x) = f(x)$.

1 pt 2. Soit x un nombre quelconque de l'intervalle $[-10;\ 10]$, alors

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2+1} = \frac{1}{x^2+1} = f(x).$$

1 pt 3. La fonction inverse sur l'intervalle $]0;\ +\infty[$ est strictement décroissante.

1 pt 4. La fonction carrée sur l'intervalle $[0;\ +\infty[$ est strictement croissante.

1.5 pt 5. Soit $0 \leq a < b \leq 10$, alors

$$\begin{aligned} 0 \leq a &< b \\ a^2 &< b^2 && \text{la fonction carrée est croissante sur } [0;+\infty[\\ a^2+1 &< b^2+1 \\ \frac{1}{a^2+1} &> \frac{1}{b^2+1} && \text{la fonction inverse est décroissante sur } [0;+\infty[\\ f(a) &> f(b) \end{aligned}$$

C'est-à-dire, par définition, la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[0;\ 10]$.

1 pt 6. On admet que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[-10;\ 0]$. Alors, on a

x	-10	0	10
$f(x)$	$\frac{1}{101}$ $\nearrow$	1	$\searrow$ $\frac{1}{101}$

1 pt 7. Du précédent tableau de variation, on déduit que f admet comme maximum 1 atteint en $x = 0$ et un minimum $\frac{1}{101}$ atteint en $x = -10$ et $x = 10$.

Exercice 3. On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé. Soit $A(1;\ 4)$ et $B(8;\ -2)$ deux points.

1 pt 1. La $\mathcal{D}_1$ est parallèle à (OA), ainsi le vecteur $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$. On en déduit que $\mathcal{D}_1$ admet une équation cartésienne de la forme $4x - y + c = 0$ où c est un nombre réel. De plus, la droite $\mathcal{D}_1$ passe par le point B, d'où

$$4x_B - y_B + c = 0 \iff 4 \times 8 - (-2) + c = 0 \iff c = -34$$

Une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}_1$ est donc : $4x - y - 34 = 0$.

1 pt 2. La $\mathcal{D}_2$ est parallèle à (OB), ainsi le vecteur $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}8\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$. On en déduit que $\mathcal{D}_2$ admet une équation cartésienne de la forme $-2x - 8y + c = 0$ où c est un nombre réel. De plus, la droite $\mathcal{D}_2$ passe par le point A, d'où

$$-2x_A - 8y_A + c = 0 \iff -2 \times 1 - 8 \times 4 + c = 0 \iff c = 34$$

Une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}_1$ est donc : $-2x - 8y + 34 = 0$ ou, en divisant par -2 : $x + 4y - 17 = 0$. $\mathcal{D}_2$ parallèle à (OB) passant par A.

2 pt 3. Soit $D(x;\,y)$ le point d'intersection des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, alors

$$\begin{cases} 4x - y - 34 & = 0 \\ -2x - 8y + 34 & = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y & = 4x - 34 \\ -2x - 8(4x - 34) + 34 & = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y & = 4x - 34 \\ -34x + 9 \times 34 & = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y & = 4x - 34 = 4 \times 9 - 34 = 2 \\ x & = \frac{-9\times 34}{-34} = 9 \end{cases}$$

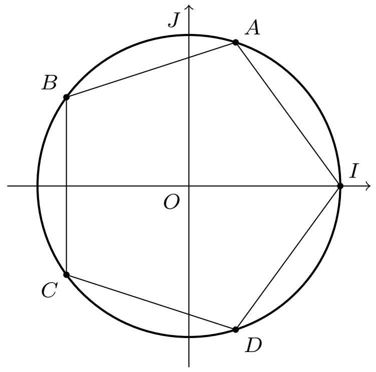
D'où $D(9;\,2)$.

4. (*) Par construction les côtés du quadrilatère $OBDA$ sont deux à deux parallèles, ainsi le $OBDA$ est un parallélogramme. De plus, on note que le produit scalaire $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 1 \times 8 + 4 \times (-2)$ est nul. D'où (OA) et (OB) sont perpendiculaires et le parallélogramme $OBDA$ est plus précisément un rectangle.

Devoir sur table 2 : Droites, trigonométrie et fonctions de référence (bis)

mardi 12 janvier 2016

Exercice 1. On considère les points A, B, C et D sur le cercle trigonométrique tels que le polygone $IABCD$ soit un pentagone régulier.



1. a) Déterminer une mesure des angles $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA})$, $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OC})$ et $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.
   b) Déterminer les coordonnées des points A et D en fonction de cosinus et sinus d'angles.
2. On admet qu'on a la relation suivante :
$$\cos(\frac{4\pi}{5}) + \cos(\frac{2\pi}{5}) + \frac{1}{2} = 0 \qquad (\star)$$
   a) À l'aide de l'identité $(\star)$ et des formules de trigonométrie, montrer qu'on a
$$4\cos^2(\frac{2\pi}{5}) + 2\cos(\frac{2\pi}{5}) - 1 = 0$$
   b) Déterminer les racines de l'équation du second degré $4x^2 + 2x - 1 = 0$.
   c) En déduire que
$$\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$
3. Calculer $\frac{2\pi}{5} - \frac{\pi}{3}$.
4. Déterminer $\cos(\frac{\pi}{15})$.

Formulaire:

1. $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$;
2. $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$;
3. $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$;
4. $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$;
5. $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$;
6. $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$.

Exercice 2. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{x^2+2} + 1$$

sur l'intervalle $[-10;\ 10]$.

1. Calculer $f(-1)$, $f(1)$, $f(-2)$, $f(2)$, $f(-3)$ et $f(3)$. Que peut-on conjecturer sur la fonction f ?
2. Démontrer votre conjecture.
3. Rappeler le sens de variation de la fonction inverse sur l'intervalle $]-\infty;\ 0[$.
4. Rappeler le sens de variation de la fonction carrée sur l'intervalle $]-\infty;\ 0]$.
5. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-10; 0]$.
6. On admet que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[0;\ 10]$. En déduire le tableau de variation de la fonction f.
7. Déterminer le maximum et le minimum de la fonction f.

Exercice 3. On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé. Soit $A(1;\ 3)$ et $B(6;\ -2)$ deux points.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}_1$ parallèle à (OA) passant par B.
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}_2$ parallèle à (OB) passant par A.
3. Déterminer les coordonnées de D, point d'intersection des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.
4. (*) Quelle est la nature du quadrilatère $OBDA$?

Devoir maison 3 : Produit scalaire

Pour le jeudi 28 janvier 2016

Exercice 1. Soit les points $A(3;\,5)$, $B(-3;\,7)$, $C(-1;\,1)$ et $D(5;\,-1)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. Calculer $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC}$.
2. Montrer que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
3. En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.
4. (*) Comparer $2AB^2 + 2BC^2$ et $AC^2 + BD^2$.
5. (*) Compléter la phrase : Dans un parallélogramme $ABCD$, on a $2AB^2 + 2BC^2 \dots$
   Démontrer l'affirmation.

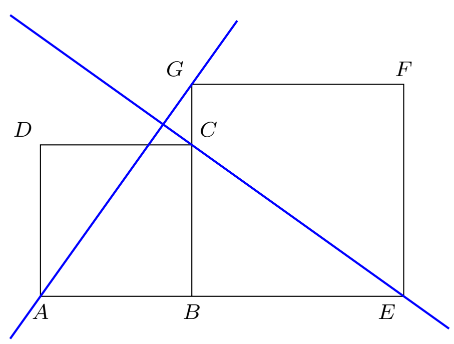
Exercice 2. Soit $ABCD$ un losange tel que $AC = 8$ et $BD = 10$. On note O le centre de ce losange.

1. Faire une figure.
2. Calculer $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
3. a) Décomposer le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DB}$. En déduire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.
   b) De la même façon, calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Exercice 3 (Le nombre dérivé)**.** Soit $f : [-5; 5] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$.

1. Établir la relation $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ pour tous réels x et y.
2. a) En déduire une factorisation de $(2 + h)^3 - 8$.
   b) Déterminer alors le nombre dérivé de la fonction f en 2, qu'on notera $f'(2)$.
3. On note d la droite d'équation $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$.
   a) Vérifier que l'équation de d se réécrit ainsi : $y = 12x - 16$.
   b) Avec geogbra ou sur feuille, tracer le graphe de la fonction f et la droite d. Vérifier que d semble bien être la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 2.

Exercice 4 (Facultatif)**.** Soit $ABCD$ et $BEFG$ deux carrés.



À l'aide d'un produit scalaire, montrer que les droites (AG) et (EC) sont perpendiculaires.

Devoir maison 3 : Produit scalaire

corrigé

Exercice 1. Soit les points $A(3;\,5)$, $B(-3;\,7)$, $C(-1;\,1)$ et $D(5;\,-1)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1 pt 1. On a $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}8\\-8\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\-4\end{pmatrix} = 8\times(-4)+(-8)\times(-4)=0.$

1 pt 2. et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-6\\2\end{pmatrix}$ est égal à $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}-6\\2\end{pmatrix}$, car les deux vecteurs ont les mêmes coordonnées.

0.5 pt 3. On vient de voir que les vecteurs formés par les côtés opposés du quadrilatère $ABCD$ sont égaux, d'où $ABCD$ est un parallélogramme. De plus, d'après la question 1., les diagonales sont perpendiculaires, ainsi $ABCD$ est un losange.

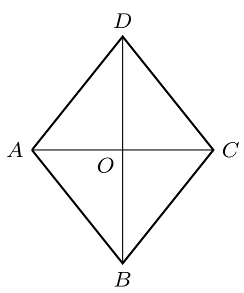
+0.5 pt 4. On remarque que $2AB^2+2BC^2=AC^2+BD^2=160$.

+0.5 pt 5. Dans un parallélogramme $ABCD$, on a $2AB^2+2BC^2=AC^2+BD^2$. En effet, si $ABCD$ est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$. Ainsi, d'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}$. D'où

$$\begin{aligned}AC^2+BD^2&=\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{BD}^2\\&=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})^2+(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB})^2\\&=\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{BC}^2-2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}^2\\&=2AB^2+2BC^2\end{aligned}$$

Exercice 2. Soit $ABCD$ un losange tel que $AC=8$ et $BD=10$. On note O le centre de ce losange.

0.5 pt 1.



1.5 pt 2. Les diagonales dans un losange sont perpendiculaires, d'où $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$;
Le projeté de C sur la droite (BD) est le point O, d'où $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}=BO\times BD=\frac{10}{2}\times 10=50$ et enfin, le projeté de B sur la droite (AC) est le point O, d'où $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AO\times AC=4\times 8=32$.

1 pt 3. a) D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}$. D'où

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}&=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB})\cdot\overrightarrow{AD}\\&=\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AD}\\&=AD^2-\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DA}\\&=(4^2+5^2)-5\times 10\\&=-9\end{aligned}$$

1 pt b) De même,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} &= (\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC})\\ &= (\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{BO}-\overrightarrow{OA})\\ &= \overrightarrow{BO}^2-\overrightarrow{OA}^2\\ &= 5^2-4^2\\ &= 9\end{aligned}$$

Exercice 3. Soit $f : [-5;5] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$.

0.5 pt 1. Soit x et y deux nombres réels, alors, en développant, on a

$$(x-y)(x^2+xy+y^2) = x^3 + \cancel{x^2y} + \cancel{xy^2} - \cancel{yx^2} - \cancel{xy^2} - y^3 = x^3 - y^3$$

1 pt 2. a) On en déduit que

$$\begin{aligned}(2+h)^3-8 &= (2+h)^3-2^3\\ &= (2+h-2)((2+h)^2+(2+h)\times 2+2^2)\\ &= h(4+4h+h^2+4+2h+4)\\ &= h(12+6h+h^2)\end{aligned}$$

pour tout nombre réel h.

1 pt b) Soit h un nombre réel non nul (tel que $2+h$ soit dans l'intervalle $[-5;\,5]$), alors le taux d'accroissement de 2 à $2+h$ est égal à

$$\frac{(2+h)^3-2^3}{h} = \frac{\cancel{h}(12+6h+h^2)}{\cancel{h}} = 12+6h+h^2$$

Donc

$$\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^3-2^3}{h} = 12$$

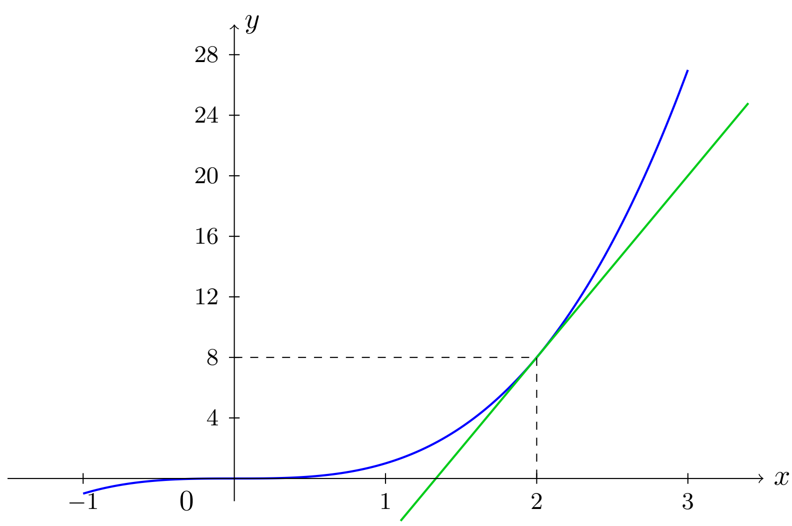
Ainsi f est dérivable en 2 et le nombre dérivé de f en 2 est $f'(2) = 12$.

3. On note d la droite d'équation $y = f'(2)(x-2)+f(2)$.

1 pt a) On a vu que $f'(2) = 12$, $f(2) = 2^3 = 8$, d'où l'équation de d se réécrit ainsi :

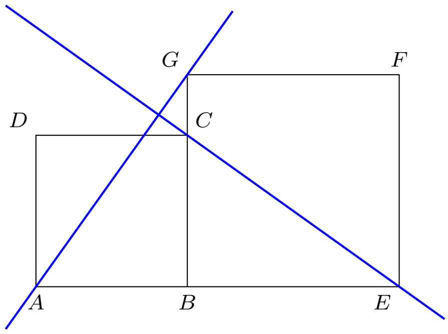
$$y = 12(x-2)+8 = 12x-24+8 = 12x-16.$$

b) Traçons le graphe de la fonction f et la droite d :



Effectivement la droite d semble bien être la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 2.

Exercice 4 (Facultatif)**.** Soit $ABCD$ et $BEFG$ deux carrés.



Notons a le côté du carré $ABCD$ et b le côté du carré $BEFG$, alors

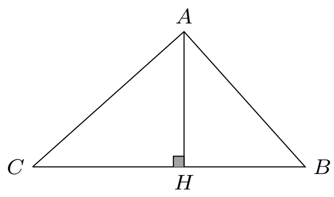
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{EC} &= (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG})\cdot(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC})\\ &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EB}+0+0+\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{BC}\\ &= -ab+ab\\ &= 0\end{aligned}$$

D'où, les droites (AG) et (EC) sont perpendiculaires.

Exercices sur le produit scalaire :

Projeté orthogonal

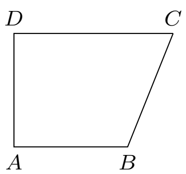
Exercice 1. Soit ABC un triangle et H le pied de la hauteur issue de A. On suppose que $AB = 6$, $BH = 4$ et $HC = 5$



À l'aide de projetés orthogonaux, calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

Exercice 2. Soit $ABCD$ un carré de côté 5. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}$.

Exercice 3. Soit $ABCD$ un trapèze rectangle en A et D tel que : $AB = AD = 5$ et $DC = 7$.



Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD}$.

Exercice 4. Soit deux points A et B tels que $AB = 6$. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

a) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ b) $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

Norme et angle

`Exercice 10, 11 p 253`

Exercice 5. Déterminer une valeur approchée au dixième de radian près de l'angle $(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB})$ sachant que :

1. $CA = 8$, $CB = 4$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 12$;
2. $CA = 5$, $CB = 8$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -6$;

Exercice 6. On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé. Soit les points $A(0; 4)$, $B(6; 3)$ et $C(-5; -2)$.

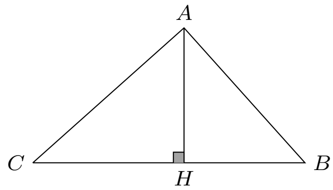
1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, puis les longueurs AB et AC.
2. En déduire une valeur approchée des mesures des angles du triangle ABC.

`Exercice 12 p 253`
`Exercice 96, 100 p 263`

Exercices sur le produit scalaire :

Projeté orthogonal

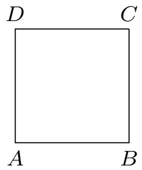
Exercice 1. Soit ABC un triangle et H le pied de la hauteur issue de A. On suppose que $AB = 6$, $BH = 4$ et $HC = 5$



D'après le théorème de Pythagore, $AH = \sqrt{6^2 - 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ et $AC = \sqrt{5^2 + 20} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$. Ainsi, par construction, on a :

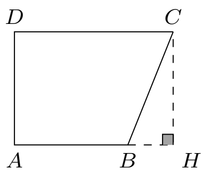
1. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BH \times BC = 4 \times 9 = 36$;
2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = AH \times AH = 20$;
3. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH} = AH \times AH = 20$;
4. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = CH \times CB = 5 \times 9 = 45$.

Exercice 2. Soit $ABCD$ un carré de côté 5.



Alors, on note que le point B est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB), d'où $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AB = 16$. De même, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = 16 = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}$.

Exercice 3. Soit $ABCD$ un trapèze rectangle en A et D tel que : $AB = AD = 5$ et $DC = 7$.



On a :

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$;
2. $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = -CD \times AB = -5 \times 7 = -35$;

3. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = AD \times AD = 5^2 = 25\,;$
4. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = AB \times AH = 5 \times (7-5) = 10\,;$
5. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} = CD \times CD = 7^2 = 49.$

Exercice 4. Soit deux points A et B tels que $AB = 6$. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

1. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$: Si M vérifie la précédente équation, alors la droite (AM) est perpendiculaire à la droite (AB), c'est-à-dire M appartient à la droite $\mathcal{D}_1$ perpendiculaire à (AB) passant par A. Réciproquement, si M appartient à la droite $\mathcal{D}_1$, alors M vérifie aussi la relation. D'où, le lieu géométrique décrit est la droite $\mathcal{D}_1$.
2. $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$: De même, le lieu géométrique décrit est la droite perpendiculaire à (AB) passant par B.

Norme et angle

Exercice (exercice 10 p 253)**.**

1. $(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) = ||\overrightarrow{u}||\,||\overrightarrow{v}||\,\cos(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) = \sqrt{2} \times 5 \times \cos(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \times 5 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\,;$
2. $(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) = ||\overrightarrow{u}||\,||\overrightarrow{v}||\,\cos(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) = 3 \times 2 \times \cos(\frac{-2\pi}{3}) = 3 \times 2 \times \frac{-1}{2} = -3.$

Exercice (exercice 11 p 253)**.**

a. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}) = 5 \times 5 \times \cos(\frac{2\pi}{3}) = 5^2 \times \frac{-1}{2} = \frac{-25}{2}\,;$

b. Comme le triangle est rectangle en B, le point B est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB), d'où $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AB = 5^2 - 3^2 = 16\,;$

c. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}) = r^2\ \cos(\frac{4\pi}{5}) = r^2\ \cos(\pi - \frac{\pi}{5}) = -r^2\ \cos(\frac{\pi}{5}) = -\frac{1+\sqrt{5}}{4}\,r^2.$

Exercice 5. Déterminer une valeur approchée au dixième de radian près de l'angle $(\overrightarrow{CA};\,\overrightarrow{CB})$ sachant que :

1. On sait que $\cos(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}) = \frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{CA \times CB} = \frac{12}{8\times4} = \frac{3}{8}$. D'où $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \cos^{-1}(\frac{3}{8}) = \pm1.2$ radians ;
2. On sait que $\cos(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}) = \frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{CA \times CB} = \frac{-6}{5\times8} = \frac{-3}{20}$. D'où $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \cos^{-1}(\frac{-3}{20}) = \pm1.7$ radians ;

Exercice 6. On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé. Soit les points $A(0;\,4)$, $B(6;\,3)$ et $C(-5;\,-2)$.

1. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -5 \\ -6 \end{pmatrix} = 6 \times (-5) + (-1) \times (-6) = -24\,;$
   $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2 = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = 6^2 + (-1)^2 = 37$ et $AB = \sqrt{37}\,;$
   $AC^2 = \overrightarrow{AC}^2 = (-5)^2 + (-6)^2 = 61$ et $AC = \sqrt{61}.$
2. L'angle en A mesure $\cos^{-1}(\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\times AC}) \simeq 2.1$ radians.

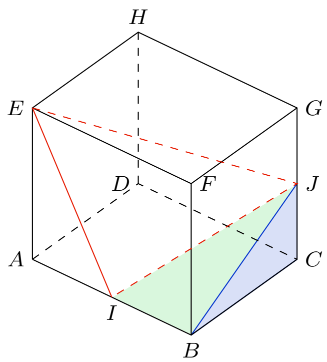
Exercice (exercice 12 p 253)**.**

a. Rappelons que pour tout nombre réel α, on a $-1 \leq \cos(\alpha) \leq 1$. D'où, quels que soient les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$:

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}| &= ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \times |\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})| \\ &\leq ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \times 1 \\ |\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}| &\leq ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \qquad \text{(inégalité de Cauchy-Schwarz)} \end{aligned}$$

b. Il y égalité lorsque $\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \pm 1$. Or cette précédente identité est vérifiée lorsque $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$ ou π modulo (2π). On en déduit qu'il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

Exercice (exercice 96 p 263). Dans le cube, $ABCDEFGH$ de côté de longueur un, I est le milieu de $[AB]$ et J est le milieu de $[CG]$.



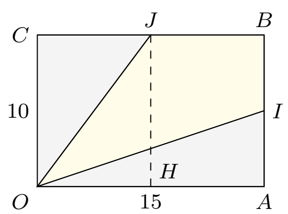
a. **Vraie.** Le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) est le point B, d'où $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AI} = AB \times AI = \frac{1}{2}$ car B est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) ;

b. **Vraie.** D'après le relation de Chasles, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AI} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} + \underbrace{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AI}}_{=0} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB}$;

c. **Vraie.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BJ}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}$ et
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IC} = AB \times IB = \frac{1}{2}$. D'où égalité.

d. **Faux.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IC} = AB \times IC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IC}) \neq AB \times IC \times \cos(\frac{\pi}{3})$, car
$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IC}) = \frac{IB}{IC} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \neq \frac{1}{2} = \cos(\frac{\pi}{3})$.

Exercice (exercice 100 p 263).



Let $OA = 15$ meters and $OC = 10$ meters. Suppose that I is the midpoint of $[AB]$ and J is the midpoint of $[BC]$.

a. $I(15;\,5)$ and $J(7.5;\,10)$.

b.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OJ} &= (\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AI})\cdot(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HJ})\\ &= \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{HJ}+\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{HJ}\\ &= 15\times 7.5+0+0+5\times 10\\ &= 162.5\end{aligned}$$

c. Applying the Pythagorean theorem, we get :

$$||\overrightarrow{OI}|| = OI = \sqrt{15^2+5^2} = 5\sqrt{10}$$

and

$$||\overrightarrow{OJ}|| = OJ = \sqrt{7.5^2+10^2} = 12.5$$

d. Thus,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OJ} &= OI\times OJ\times\cos(\widehat{IOJ})\\ \frac{162.5}{5\sqrt{10}\times 12.5} &= \cos(\widehat{IOJ})\end{aligned}$$

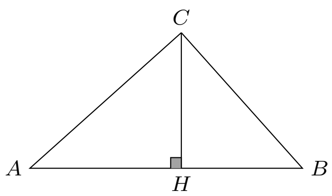
and $\widehat{OIJ} = \cos^{-1}(\frac{162.5}{5\sqrt{10}\times12.5}) \simeq 0.606\times\frac{180}{\pi} \simeq 35$ degrees.

Contrôle de connaissances : Produit scalaire

jeudi 21 janvier 2016

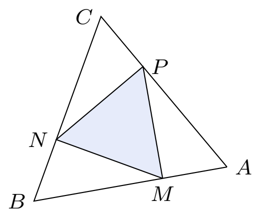
Exercice 1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ dans chacun des cas suivant :

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, $A(2; 6)$, $B(-3; 5)$ et $C(4; -1)$.
2. ABC est un triangle tel que $AB = 5$, $AC = 6$ et $\widehat{BAC} = \frac{5\pi}{6}$.
3. ABC est un triangle et H le pied de la hauteur issue de C. On suppose que $AB = 7$, $AH = 3$.



4. $ABCD$ est un rectangle dans lequel $AB = 5$.
5. A, B et C sont sur un même cercle de diamètre $[BC]$.

Exercice 2. Soit ABC un triangle équilatéral de côté 1. On place trois points M, N et P respectivement sur $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$ de telle sorte que $AM = BN = CP = \frac{1}{3}$.



1. Montrer que $\overrightarrow{MP} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.
2. De même, décomposer le vecteur $\overrightarrow{MA}$ selon les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3. Calculer $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MP}$.
4. Quelle est la nature du triangle AMP ? Justifier.
5. Justifier que les triangles NPC et BMN sont rectangles.
6. Quelle est la nature triangle MNP ? Justifier.

Contrôle de connaissances : Produit scalaire

corrigé

Exercice 1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ dans chacun des cas suivant :

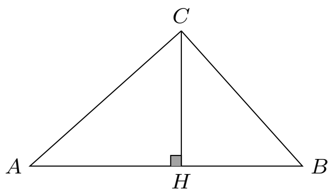
1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, $A(2;\,6)$, $B(-3;\,5)$ et $C(4;\,-1)$, on a

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-5\\-1\end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-7\end{pmatrix} = -5 \times 2 - 1 \times (-7) = -3$$

2. ABC est un triangle tel que $AB = 5$, $AC = 6$ et $\widehat{BAC} = \frac{5\pi}{6}$, on a

$$\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 5 \times 6 \times \cos(\frac{5\pi}{6}) = 30 \times \frac{-\sqrt{3}}{2} = -15\sqrt{3}$$

3. ABC est un triangle et H le pied de la hauteur issue de C. On suppose que $AB = 7$, $AH = 3$.



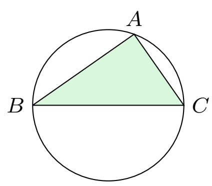
Par construction, le point H est le projeté orthogonal C sur la droite (AB) et il se trouve sur la demie-droite $[AB)$, d'où

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH = 7 \times 3 = 21$$

4. $ABCD$ est un rectangle dans lequel $AB = 5$, alors le point B est le projeté orthogonal du C sur la droite (AB) et il se trouve sur la demie-droite $[AB)$. Ainsi,

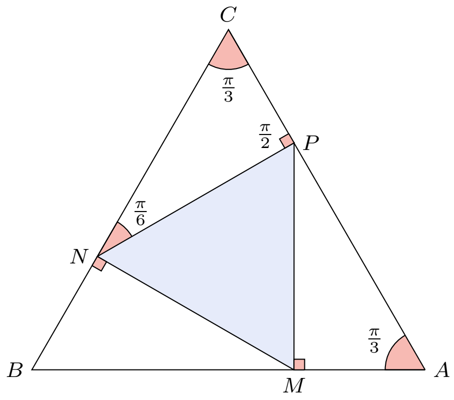
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AB = 5^2 = 25$$

5. A, B et C sont sur un même cercle de diamètre $[BC]$:



Comme le côté $[BC]$ est la diamètre du cercle circonscrit, on en déduit que le triangle ABC est rectangle en A. D'où, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

Exercice 2. Soit ABC un triangle équilatéral de côté 1. On place trois points M, N et P respectivement sur $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$ de telle sorte que $AM = BN = CP = \frac{1}{3}$.



1. Des hypothèses, on déduit que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. Ainsi, d'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MP} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AP}\\ &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

2. Dans la question précédente, on va vu que $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.
3. D'après les deux questions précédentes, on a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MP} &= (-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}) \cdot (-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB})\\ &= \frac{1}{9}\overrightarrow{AB}^2 - \frac{2}{9}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}\\ &= \frac{1}{9}AB^2 - \frac{2}{9} \times AC \times AB \times \cos(\frac{\pi}{3})\\ &= \frac{1}{9} - \frac{2}{9} \times \frac{1}{2}\\ &= 0\end{aligned}$$

4. D'après la question précédente, les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MP}$ sont orthogonaux, d'où le triangle AMP est rectangle en M.
5. La construction des triangles NPC et BMN est la même que celle du triangle AMP, d'où les triangles NPC et BMN sont rectangles.
6. Comme le triangle ABC est équilatéral, $\widehat{BCA} = \frac{\pi}{3}$ radians. De plus, dans un triangle la somme des angles vaut π radians, on en déduit que $\widehat{CNP} = \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$ (voir figure ci-dessus).

   La somme des angles $\widehat{BNM}$, $\widehat{MNP}$ et $\widehat{PNC}$ est égale π radians, d'où $\widehat{MNP} = \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ radians.

   De même, on montre que $\widehat{NMP} = \widehat{NPM} = \widehat{PNM} = \frac{\pi}{3}$ radians. Ce qui implique que le triangle MNP est équilatéral.

TP : dérivation, illustration avec Geogebra

mercredi 20 janvier 2016

Exercice 1. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$.
Pour tracer le graphe de la fonction f, tapez la commande suivante dans la zone Saisie :

```
f(x) = 0.5 * x^2 - x + 1
```

On se place en $a = 2$, soit h un nombre non nul.

1. Calculer $f(2)$ et $f(2+h)$.
2. En déduire que le taux de variation de la fonction f de 2 à $2+h$ est
$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 1 + \frac{1}{2}h$$
3. Nous allons illustrer le fait suivant :
$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 1$$
   a) Tracer en rouge la droite T d'équation $y = x - 1$:
   ```
   T: y = x - 1
   ```
   b) Créer un curseur h allant de -0.5 à 0.5 avec un pas de 0.0001.
   c) Définir les points $M(2;\ f(2))$ et $N(2+h;\ f(2+h))$:
   ```
   M = (2,f(2))
   N = (2+h, f(2+h))
   ```
   d) Tracer la droite (MN) :
   ```
   D = droite[M,N]
   ```
   e) A l'aide de la commande "Pente", afficher la pente (i.e. le coefficient directeur) de la droite (MN).
   f) Faire varier h, que remarque-t-on lorsque h est proche de 0 ?

Exercice 2 (Tangente à la courbe)**.** On considère la fonction $f :]-6;6[\to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \frac{1}{10}(x-4)(x-1)(x+5).$$

1. Tracer le graphe de la fonction f.
2. Est-il surprenant que la courbe passe par les pointes de coordonnées $(-5;\ 0)$, $(1;\ 0)$ et $(4,\ 0)$? Justifier.
3. Vérifier que $f(x) = \frac{1}{10}x^3 - \frac{21}{10}x + 2$ pour tout $x \in]-6;6[$.
4. Soit a un nombre dans l'intervalle $]-6;6[$. On admettra que le nombre dérivé de f en a est
$$f'(a) = \frac{3}{10}a^2 - \frac{21}{10}$$
   a) Créer un curseur a allant de -6 à 6 avec un pas de 0.1.

b) Placer le point $M(a;\ f(a))$.

c) Taper la commande suivante :

```
T : y = f'(a) * (x - a) + f(a)
```

d) Taper la commande suivante :

```
m = f'(a)
```

Cette commande enregistre le nombre dérivé de f en a dans la variable m.

e) À l'aide de la commande "insérer du texte", afficher sur le graphique l'équation $f'(a) = m$ de telle sorte que m soit considéré comme la variable précédemment définie.

f) Faire varier a, quelle relation y a-t-il entre le signe du nombre dérivé $f'(a)$ et le sens de variation de la fonction f au voisinage de a ?

g) À l'aide de Geogebra donner les solutions approchées a_1 et a_2 de l'équation $f'(a) = 0$.

h) Résoudre l'équation $\frac{3}{10}x^2 - \frac{21}{10} = 0$. En déduire une valeur exacte de a_1 et a_2.

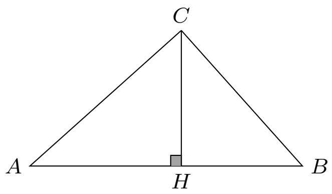
i) Qu'y a-t-il de particulier avec la tangente en a_1 et a_2 ?

Contrôle de connaissances : Produit scalaire (bis)

28 janvier 2016

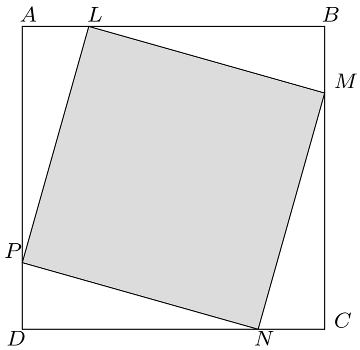
Exercice 1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ dans chacun des cas suivant :

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, $A(-2;\, \frac{4}{5})$, $B(-1;\, 9)$ et $C(\frac{1}{5};\, -3)$.
2. ABC est un triangle tel que $AB = \frac{1}{2}$, $AC = \sqrt{6}$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$.
3. ABC est un triangle et H le pied de la hauteur issue de C. On suppose que $AB = 12$, $BH = 2$.



4. $ABCD$ est un losange dans lequel $AB = 5$, $AC = 2$.
5. ABC est un triangle isocèle en C tel que $AB = 120$ et $BC = 77$.

Exercice 2. ABCD est un carré de côté 10 cm. L, M, N et P sont respectivement les points des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$, tels que $AL = BM = CN = DP = \frac{1}{4}$.



1. Montrer que $\overrightarrow{ML} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BA} - \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$;
2. De même, décomposer le vecteur $\overrightarrow{MN}$ selon les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.
3. Calculer $\overrightarrow{ML} \cdot \overrightarrow{MN}$.
4. Quelle est la nature du quadrilatère $LMNP$? Justifier.

Devoir maison 4 : Suites numériques

pour le jeudi 25 février 2016

Exercice 1 (Suite arithmétique). On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1; \\ u_{n+1} = u_n + 5 \quad \text{pour tout } n \geq 0 \end{cases}$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Compléter le programme suivant qui permet de calculer et afficher les premiers termes de la suite (u_n).

```
VARIABLES
n EST_DU_TYPE NOMBRE
u EST_DU_TYPE NOMBRE
k EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE n
  u PREND_LA_VALEUR __________
  AFFICHER "\nu_0 = "
  AFFICHER u
  POUR k ALLANT_DE 1 A n
    DEBUT_POUR
    u PREND_LA_VALEUR __________
    AFFICHER "\nu_"
    AFFICHER k
    AFFICHER " = "
    AFFICHER __________
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

3. Tester le programme avec $n = 10$.
4. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n.
5. Que vaut l'expression
$$1 + \underbrace{5 + \ldots + 5}_{n \text{ fois}}$$
en fonction de n.
6. Démontrer la conjecture précédente.
7. Écrire un programme qui demande n et affiche directement u_n.

Exercice 2 (Suite géométrique). On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1; \\ u_{n+1} = 3\,u_n \quad \text{pour tout } n \geq 0 \end{cases}$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Compléter le programme suivant qui permet de calculer et afficher les premiers termes de la suite (u_n).

```
VARIABLES
n EST_DU_TYPE NOMBRE
u EST_DU_TYPE NOMBRE
k EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE n
  u PREND_LA_VALEUR ----------
  AFFICHER "\nu_0 = "
  AFFICHER u
  POUR k ALLANT_DE 1 A n
    DEBUT_POUR
    u PREND_LA_VALEUR ----------
    AFFICHER "\nu_"
    AFFICHER ----------
    AFFICHER " = "
    AFFICHER ----------
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

3. Tester le programme avec $n = 5$.
4. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n.
5. Que vaut l'expression
$$\underbrace{3 \times \ldots \times 3}_{n \text{ fois}} \times 1$$
en fonction de n.
6. Démontrer la conjecture précédente.
7. Écrire un programme qui demande n et affiche directement u_n.

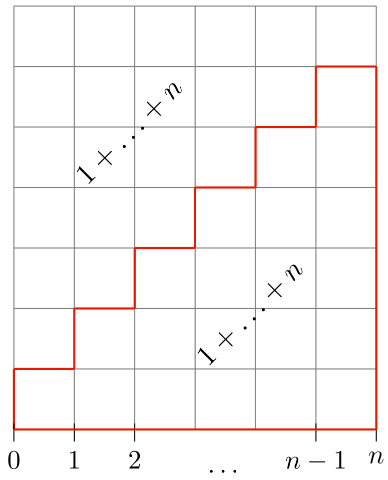
Exercice 3.

1. Écrire un programme qui demande n et affiche dans l'ordre croissant les n premiers entiers naturels. Le tester
2. Écrire un programme qui demande n et affiche dans l'ordre décroissant les n premiers entiers naturels. Le tester
3. Écrire un programme qui demande n et calcul et affiche la somme des n premiers entier naturels : $1 + 2 + 3 + \ldots + n$.
4. Taper le programme suivant :

```
VARIABLES
k EST_DU_TYPE NOMBRE
l EST_DU_TYPE NOMBRE
n EST_DU_TYPE NOMBRE
S EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE n
  S PREND_LA_VALEUR 0
  TRACER_SEGMENT_Bleu (0,0)->(n+1,0)
  TRACER_SEGMENT_Bleu (n+1,0)->(n+1,n)
  TRACER_SEGMENT_Bleu (n+1,n)->(0,n)
  TRACER_SEGMENT_Bleu (0,n)->(0,0)
  POUR k ALLANT_DE 1 A n
    DEBUT_POUR
    TRACER_SEGMENT_Rouge (k,0)->(k,k)
```

```
        TRACER_SEGMENT_Rouge (k,k)->(k+1,k)
        TRACER_SEGMENT_Rouge (k+1,0)->(k+1,k)
        S PREND_LA_VALEUR S + k
      FIN_POUR
    AFFICHER "\n S = "
    AFFICHER S
FIN_ALGORITHME
```

5. Tester le programme avec $n = 2, 3, 4, \dots, 10$.
   À chaque fois, comparer S, l'aire du domaine rouge, l'aire du rectangle bleu et le complémentaire du domaine rouge dans le rectangle bleu.
6. Conjecturer une expression de $S = 1 + 2 + 3 + \dots + n$ en fonction de n.



7. Vérifier votre conjecture pour différentes valeurs de l'entier n.

Exercice 4. On considère la suite définie par $u_1 = a$, où a est un entier supérieur à 1 et, pour tout $n \geq 1$,

$$u_{n+1} = \begin{cases} \frac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est pair,} \\ 3\,u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ est impair.} \end{cases}$$

1. Calculer à la main les cinq premiers termes de la suite (u_n) lorsque $a = 1$, $a = 2$, $a = 4$ et $a = 5$.
   Que constate-t-on ? Cette constatation est-elle encore vraie pour $a = 11$?
2. a) Écrire un algorithme qui permet de calculer les 10 premiers termes de la suite (u_n).
   b) Compléter le programme suivant pour qu'il affiche les 10 premières valeurs de la suite (u_n).

```
VARIABLES
a EST_DU_TYPE NOMBRE
u EST_DU_TYPE NOMBRE
n EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE a
  u PREND_LA_VALEUR
  n PREND_LA_VALEUR 1

  TANT_QUE ( __________ ) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    AFFICHER "\n u\_"
    AFFICHER n
    AFFICHER " = "
```

```
        AFFICHER ----------
        SI (u % 2 == 0) ALORS
            DEBUT_SI
            u PREND_LA_VALEUR ----------
            FIN_SI
        SINON
            DEBUT_SINON
            u PREND_LA_VALEUR ----------
            FIN_SINON
        n PREND_LA_VALEUR n + 1
        FIN_TANT_QUE
FIN_ALGORITHME
```

3. Modifier le programme précédent pour qu'il calcul les termes de la suite tant que $u_n \neq 1$.
4. On appelle la durée de vol le plus petit indice n tel que $u_n = 1$.
   a) Quelle est la durée de vol pour $a = 26$? Quelle est le plus grand entier atteint pendant le vol ?
   b) Calculer la durée de vol pour $a = 50$ et $a = 51$.
   c) * À l'aide de la commande `TRACER_POINT(x,y)`, écrire un programme qui pour a allant de 1 à 50 calcul la durée de vol n associée et place le point de coordonnées (a, n) sur le graphique.

Exercice 5 (Évolution d'une population)**.** Des relevés satistiques effectués sur une rivière montrent que sa population de truites diminue de 20% chaque année. Le nombre de truites en 2000 est estimé à 200 truites par hectare.
On note T_n le nombre de truites par hectare l'année $2000 + n$.

1. a) Justifier que pour tout $n \geq 0$, $T_{n+1} = 0.8\,T_n$. Quelle est la nature de la suite (T_n) ?
   b) En déduire T_n en fonction de n.
   c) Calculer T_1 et T_3. Que représentent ces deux nombres ?
   d) Combien y-aura-t'il de truites en 2015 ?
   e) Au bout de combien d'années les truites auront-elles totalement disparu de la rivière ?
2. On décide d'introduire par alevinage 200 truites par hectare chaque année et on suppose qu'il n'y a pas de pertes.
   a) Montrer que pour tout $n \geq 0$, on a maintenant $T_{n+1} = 0.8\,T_n + 200$.
   b) Calculer T_0, T_1, T_2, T_3, T_4.
   c) Soit $u_n = T_n - 1000$ pour tout $n \geq 0$.
   Montrer que la suite (u_n) est géométrique.
   d) Exprimer u_n en fonction de n.
   e) En déduire T_n en fonction de n, puis justifier que la disparition des truites est enrayée.

Devoir maison 4 : Suites numériques

corrigé

Exercice 1 (Suite arithmétique)**.** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1; \\ u_{n+1} = u_n + 5 \quad \text{pour tout } n \geq 0 \end{cases}$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Compléter le programme suivant qui permet de calculer et afficher les premiers termes de la suite (u_n).

```
VARIABLES
n EST_DU_TYPE NOMBRE
u EST_DU_TYPE NOMBRE
k EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
   LIRE n
   u PREND_LA_VALEUR 1
   AFFICHER "\nu_0 = "
   AFFICHER u
   POUR k ALLANT_DE 1 A n
      DEBUT_POUR
      u PREND_LA_VALEUR u + 5
      AFFICHER "\nu_"
      AFFICHER k
      AFFICHER " = "
      AFFICHER u
      FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

3. Tester le programme avec $n = 10$.
4. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n.
   $u_n = 1 + 5\,n$ *pour tout entier* n
5. On a
$$1 + \underbrace{5 + \ldots + 5}_{n \text{ fois}} = 1 + n \times 5$$
6. Démontrer la conjecture précédente.
   Par définition, $u_n = u_{n-1} + 5 = u_{n-2} + 5 + 5 = 1 + \underbrace{5 + \ldots + 5}_{n \text{ fois}} = 1 + 5n.$
7. Écrire un programme qui demande n et affiche directement u_n.

```
VARIABLES
n EST_DU_TYPE NOMBRE
u EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
   LIRE n
   u PREND_LA_VALEUR 1 + 5 * n
   AFFICHER "\nu_n = "
   AFFICHER u
FIN_ALGORITHME
```

Exercice 2 (Suite géométrique)**.** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1; \\ u_{n+1} = 3\,u_n \quad \text{pour tout } n \geq 0 \end{cases}$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Compléter le programme suivant qui permet de calculer et afficher les premiers termes de la suite (u_n).

```
VARIABLES
n EST_DU_TYPE NOMBRE
u EST_DU_TYPE NOMBRE
k EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE n
  u PREND_LA_VALEUR 1
  AFFICHER "\nu_0 = "
  AFFICHER u
  POUR k ALLANT_DE 1 A n
    DEBUT_POUR
    u PREND_LA_VALEUR 3 * u
    AFFICHER "\nu_"
    AFFICHER n
    AFFICHER " = "
    AFFICHER u
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

3. Tester le programme avec $n = 5$.
4. On conjecture que $u_n = 3^n$ pour tout entier n.
5. Par définition de la puissance d'un nombre, on a

$$\underbrace{3 \times \ldots \times 3}_{n \text{ fois}} \times 1 = 3^n$$

pour tout entier naturel n.

6. $u_n = 3 \times u_{n-1} = \underbrace{3 \times \ldots \times 3}_{n \text{ fois}} \times 1 = 3^n$.
7. Écrire un programme qui demande n et affiche directement u_n :

```
VARIABLES
n EST_DU_TYPE NOMBRE
u EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE n
  u PREND_LA_VALEUR pow(3,n)
  AFFICHER "\nu_n = "
  AFFICHER u
FIN_ALGORITHME
```

Exercice 3.

1. Écrire un programme qui demande n et affiche dans l'ordre croissant les n premiers entiers naturels. Le tester

```
VARIABLES
n EST_DU_TYPE NOMBRE
k EST_DU_TYPE NOMBRE
```

```
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE n
  POUR k ALLANT_DE 1 A n
    DEBUT_POUR
    AFFICHER "\nu_"
    AFFICHER k
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

2. Écrire un programme qui demande n et affiche dans l'ordre décroissant les n premiers entiers naturels. Le tester

```
VARIABLES
n EST_DU_TYPE NOMBRE
k EST_DU_TYPE NOMBRE
l EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE n
  POUR k ALLANT_DE 1 A n
    DEBUT_POUR
    AFFICHER "\nu_"
    l PREND_LA_VALEUR n+1 - k
    AFFICHER l
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

3. Écrire un programme qui demande n et calcul et affiche la somme des n premiers entier naturels : $1 + 2 + 3 + \ldots + n$.

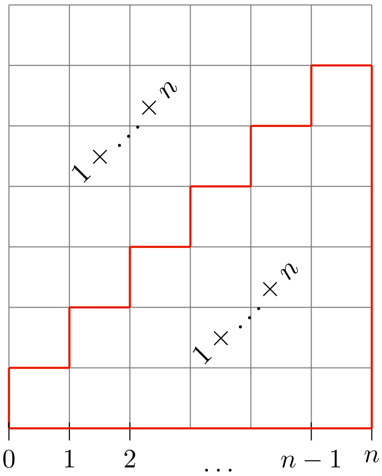
```
VARIABLES
n EST_DU_TYPE NOMBRE
k EST_DU_TYPE NOMBRE
Somme EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE n
  Somme PREND_LA_VALEUR 0
  POUR k ALLANT_DE 1 A n
    DEBUT_POUR
    Somme PREND_LA_VALEUR Somme + k
    FIN_POUR
  AFFICHER "1 + ... + n = "
  AFFICHER Somme
FIN_ALGORITHME
```

4. Taper le programme suivant :

```
VARIABLES
k EST_DU_TYPE NOMBRE
l EST_DU_TYPE NOMBRE
n EST_DU_TYPE NOMBRE
S EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE n
  S PREND_LA_VALEUR 0
  TRACER_SEGMENT_Bleu (0,0)->(n+1,0)
  TRACER_SEGMENT_Bleu (n+1,0)->(n+1,n)
  TRACER_SEGMENT_Bleu (n+1,n)->(0,n)
  TRACER_SEGMENT_Bleu (0,n)->(0,0)
  POUR k ALLANT_DE 1 A n
    DEBUT_POUR
    TRACER_SEGMENT_Rouge (k,0)->(k,k)
    TRACER_SEGMENT_Rouge (k,k)->(k+1,k)
    TRACER_SEGMENT_Rouge (k+1,0)->(k+1,k)
```

```
    |   S PREND_LA_VALEUR S + k
    |   FIN_POUR
    AFFICHER "\n S = "
    AFFICHER S
FIN_ALGORITHME
```

5. Tester le programme avec $n = 2, 3, 4, \ldots, 10$.
   À chaque fois, comparer S, l'aire du domaine rouge, l'aire du rectangle bleu et le complémentaire du domaine rouge dans le rectangle bleu.
6. On conjecture que $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ pour tout entier naturel n.



7. Vérifier votre conjecture pour différentes valeurs de l'entier n.

Exercice 4. On considère la suite définie par $u_1 = a$, où a est un entier supérieur à 1 et, pour tout $n \geq 1$,

$$u_{n+1} = \begin{cases} \frac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est pair,} \\ 3\,u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ est impair.} \end{cases}$$

1. Calculer à la main les cinq premiers termes de la suite (u_n) lorsque $a = 1$, $a = 2$, $a = 4$ et $a = 5$.
   Que constate-t-on ? Cette constatation est-elle encore vraie pour $a = 11$?
2. a) (Écrire un algorithme qui permet de calculer les 10 premiers termes de la suite (u_n).)
   b) Compléter le programme suivant pour qu'il affiche les 10 premières valeurs de la suite (u_n).

```
VARIABLES
a EST_DU_TYPE NOMBRE
u EST_DU_TYPE NOMBRE
n EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE a
  u PREND_LA_VALEUR a
  n PREND_LA_VALEUR 1
  TANT_QUE ( n <= 11 ) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    AFFICHER "\n u\_"
    AFFICHER n
    AFFICHER " = "
    AFFICHER u
    SI (u % 2 == 0) ALORS
```

```
            DEBUT_SI
            u PREND_LA_VALEUR u/2
            FIN_SI
        SINON
            DEBUT_SINON
            u PREND_LA_VALEUR 3*u + 1
            FIN_SINON
        n PREND_LA_VALEUR n + 1
        FIN_TANT_QUE
FIN_ALGORITHME
```

3. Modifier le programme précédent pour qu'il calcul les termes de la suite tant que $u_n \neq 1$.
   Il suffit de remplacer `n <= 11` *par* `u != 1`*.*
4. On appelle la durée de vol le plus petit indice n tel que $u_n = 1$.
   a) Quelle est la durée de vol pour $a = 26$? Quelle est le plus grand entier atteint pendant le vol ?
   La durée de vol pour $a = 26$ est de 11 et le plus grand entier atteint est 40.
   b) Calculer la durée de vol pour $a = 50$ et $a = 51$.

```
VARIABLES
a EST_DU_TYPE NOMBRE
u EST_DU_TYPE NOMBRE
n EST_DU_TYPE NOMBRE
d_vol EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
    LIRE a
    u PREND_LA_VALEUR a
    n PREND_LA_VALEUR 1
    d_vol PREND_LA_VALEUR 1
    TANT_QUE ( u != 1) FAIRE
        DEBUT_TANT_QUE
        SI (u % 2 == 0) ALORS
            DEBUT_SI
            u PREND_LA_VALEUR u / 2
            FIN_SI
        SINON
            DEBUT_SINON
            u PREND_LA_VALEUR 3*u + 1
            FIN_SINON
        n PREND_LA_VALEUR n+1
        d_vol PREND_LA_VALEUR d_vol + 1
        AFFICHER "\n u\_"
        AFFICHER n
        AFFICHER " = "
        AFFICHER u
        FIN_TANT_QUE
    AFFICHER "\n durée de vol: "
    AFFICHER d_vol
FIN_ALGORITHME
```

   Pour $a = 50$, la durée de vol est de 25 et pour $a = 51$, la durée de vol est de 25 aussi.
   c) * À l'aide de la commande `TRACER_POINT(x,y)`, écrire un programme qui pour a allant de 1 à 50 calcul la durée de vol n associée et place le point de coordonnées (a, n) sur le graphique.

```
VARIABLES
a EST_DU_TYPE NOMBRE
u EST_DU_TYPE NOMBRE
n EST_DU_TYPE NOMBRE
d_vol EST_DU_TYPE NOMBRE
```

```
DEBUT_ALGORITHME
  POUR a ALLANT_DE 1 A 50
    DEBUT_POUR
    u PREND_LA_VALEUR a
    n PREND_LA_VALEUR 1
    d_vol PREND_LA_VALEUR 1
    TANT_QUE ( u != 1) FAIRE
      DEBUT_TANT_QUE
      SI (u % 2 == 0) ALORS
        DEBUT_SI
        u PREND_LA_VALEUR u / 2
        FIN_SI
      SINON
        DEBUT_SINON
        u PREND_LA_VALEUR 3*u + 1
        FIN_SINON
      n PREND_LA_VALEUR n+1
      d_vol PREND_LA_VALEUR d_vol + 1
      FIN_TANT_QUE
    TRACER_POINT (a,d_vol)
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

Exercice 5 (Évolution d'une population)**.** Des relevés satistiques effectués sur une rivière montrent que sa population de truites diminue de 20% chaque année. Le nombre de truites en 2000 est estimé à 200 truites par hectare.
On note T_n le nombre de truites par hectare l'année $2000 + n$.

1. a) Diminuer de 20%, revient à multiplier par $1 - \frac{20}{100} = 0.8$. D'où, $T_{n+1} = 0.8 \times T_n$ pour tout entier $n \geq 0$.

   b) D'après, la question précédente, la suite (T_n) est une suite géométrique de raison 0.8 et terme initial 200. Ainsi, $T_n = T_0 \times q^n = 200 \times 0.8^n$ pour tout entier n.

   c) On note que $T_1 = 0.8 \times T_0 = 0.8 \times 200 = 160$, ainsi il y aura 160 truites en 2001. En 2003, il y aura $T_3 = 200 \times 0.8^3 \simeq 102$ truites par hectare.

   d) En 2015, il y aura $T_{15} = 200 \times 0.8^{15} \simeq 7$ truites par hectare.

   e) Si l'on arrondi à l'entier les valeurs de la suite T_n, on note que $T_{26} \simeq 1$ et $T_{27} \simeq 0$. Ainsi, au bout de 27 années les truites auront totalement disparu de la rivière.

2. On décide d'introduire par alevinage 200 truites par hectare chaque année et on suppose qu'il n'y a pas de pertes.

   a) Durant l'année $2000 + n$, on perd 20% des truites, il en reste donc $0.8 \times T_n$. Ensuite, au début de l'année suivant, on ajoute 200 truites, d'où le nombre de truite l'année $2000 + n + 1$ est $T_{n+1} = 0.8\,T_n + 200$.

   b) Calculer $T_0 = 200$, $T_1 = 360$, $T_2 = 488$, $T_3 \simeq 590$, $T_4 \simeq 672$.

   c) Soit $u_n = T_n - 1000$ pour tout $n \geq 0$.
   Soit n un entier, alors
   $$u_{n+1} = T_{n+1} - 1000 = 0.8T_n + 200 - 1000 = 0.8T_n - 0.8 \times 1000 = 0.8(T_n - 1000) = 0.8u_n$$
   On en déduit que la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 0.8$ et de terme initial $u_0 = T_0 - 1000 = 200 - 1000 = -800$.

   d) Soit n un entier, alors $u_n = u_0 \times q^n = -800 \times 0.8^n$.

   e) Si l'on revient à la définition de u_n, on déduit que
   $$T_n = u_n + 1000 = 1000 - 800 \times 0.8^n.$$

On note que dans l'expression qui définit T_n, le terme $800 \times 0.8^{n+1} = (800 \times 0.8^n) \times 0.8$ diminue continuellement et s'approche indéfiniement de 0. Ainsi, le nombre de truites par hectares tend à être de plus en plus proche de 1000 et donc la disparition des truites est enrayée.
Remarque : On note que si $T_n = 1000$ alors, $T_{n+1} = 0.8T_n + 200 = 1000 = T_n$. Le nombre de truites tend à être stable.

Devoir sur table 5 : Suites numériques

jeudi 3 mars 2016

Exercice 1. Soit (u_n) la suite arithmétique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $u_0 = 1$.

1. Calculer u_1, u_2.
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Calculer u_{20}.
4. Calculer $u_0 + u_1 + \ldots + u_{20}$.

Exercice 2. Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 & = 20 \\ u_{n+1} & = 1.2\, u_n - 1 \qquad \text{pour tout entier } n \end{cases}$$

1. Calculer u_1, u_2.
2. Compléter l'algorithme suivant pour qu'il affiche u_5 :

```
1: Variables : n, U sont des nombres
2: U prend la valeur ___________________
3: Pour n allant de 1 à __________ faire
4:     U prend la valeur ___________________
5: Fin Pour
6: Afficher U
```

   Calculer u_5.
3. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 5$ pour tout entier n.
   a) Calculer v_0.
   b) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 1.2.
   c) Exprimer v_n en fonction de n.
   d) En déduire u_n en fonction de n.
   e) Calculer $v_0 + v_1 + \ldots + v_{10}$.
4. * Calculer $u_0 + u_1 + \ldots + u_{10}$.
5. * Déterminer le plus petit entier n tel que la somme $u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ soit supérieure à 2 000.

Facultatif **Exercice 3** (Suite de Fibonnacci)**.** Le but de cet exercice est, au travers de l'étude des suites (u_n) telles que :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad \text{pour tout entier } n, \qquad (\star)$$

de déterminer une expression du n-ème terme de la suite de Fibonacci en fonction de n.

1. Déterminer les nombres q non nuls tels que la suite (u_n) définie par $u_n = q^n$ pour tout n vérifie la propriété $(\star)$.

2. Soit q_1 et q_2 les deux solutions de la question précédente. Soit a et b deux nombres réels. On considère la suite (v_n) définie par

$$v_n = a\,q_1^n + b\,q_2^n \quad \text{pour tout entier } n$$

Montrer que (v_n) vérifie aussi la propriété $(\star)$.

3. On rappelle que la suite de Fibonacci (w_n) est définie ainsi :

$$\begin{cases} w_0 & = 0 \\ w_1 & = 1 \\ w_{n+2} & = w_{n+1} + w_n \quad \text{pour tout entier } n \end{cases}$$

Exprimer w_n en fonction de n.

Devoir sur table 5 : Suites numériques

corrigé

Exercice 1. Soit (u_n) la suite arithmétique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $u_0 = 1$.

1. On a $u_1 = u_0 + \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ et $u_2 = u_1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$.
2. D'après le cours, pour tout entier n, on a :

$$u_n = u_0 + n \times r = 1 + n \times \frac{1}{3} = \frac{3+n}{3}$$

3. D'où, $u_{20} = \frac{3+20}{3} = \frac{23}{3}$.
4. D'après le cours,

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_{20} = 21 \times \frac{u_0 + u_{20}}{2} = 21 \times \frac{\frac{3+23}{3}}{2} = \frac{7 \times 3 \times 2 \times 13}{3 \times 2} = 91$$

Exercice 2. Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 & = 20 \\ u_{n+1} & = 1.2\, u_n - 1 \qquad \text{pour tout entier } n \end{cases}$$

1. D'après la relation de récurrence, on a $u_1 = 1.2u_0 - 1 = 1.2 \times 20 - 1 = 23$ et $u_2 = 1.2 \times 23 - 1 = 26.6$.
2. L'algorithme suivant permet d'afficher u_5 :

```
1: Variables : n, U sont des nombres
2: U prend la valeur 20
3: Pour n allant de 1 à 5 faire
4:     U prend la valeur 1.2 × U − 1
5: Fin Pour
6: Afficher U
```

   À l'aide de la calculatrice, on obtient $u_5 = 42.3248$.
3. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 5$ pour tout entier n.
   a) Alors, en particulier, pour $n = 0$, on a $v_0 = u_0 - 5 = 20 - 5 = 15$.
   b) Soit n un entier naturel, alors

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 5 \\ &= 1.2u_n - 1 - 5 \\ &= 1.2(u_n - \frac{6}{1.2}) \\ &= 1.2(u_n - 5) \\ &= 1.2v_n \end{aligned}$$

   Ainsi, la suite (v_n) est géométrique de raison 1.2.
   c) On en déduit que $v_n = v_0 \times q^n = 15 \times 1.2^n$ en fonction de n.
   d) En revenant à la définition de la suite (v_n) et à l'aide de la question précédente, on déduit que pour tout entier n, on a $u_n = v_n + 5 = 15 \times 1.2^n + 5$ en fonction de n.

e) D'après le cours,

$$v_0 + v_1 + \ldots + v_{10} = v_0 \times \frac{1.2^{11} - 1}{1.2 - 1} = 75 \times (1.2^{11} - 1) \simeq 482.26$$

4. D'après la question précédente, on a

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + \ldots + u_{10} &= v_0 + 5 + v_1 + 5 + \ldots + v_{10} + 5 \\ &= v_0 + \ldots v_{10} + 11 \times 5 \\ &= 75(1.2^{11} - 1) + 55 \\ &\simeq 537.26 \end{aligned}$$

5. En reprenant le raisonnement de la question précédente, on déduit que :

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n = 75 \times (1.2^{n+1} - 1) + 5(n + 1)$$

À l'aide de la calculatrice, en faisant une table, on observe que la somme $u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ est supérieure à 2 000 lorsque $n \geq 17$.
Autre solution : On aurait aussi pu implémenter l'algorithme suivant dans la calculatrice :

Variables : n, U, S sont des nombres
N prend la valeur 0
U prend la valeur 20
Somme prend la valeur 20
Tant que *Somme* < 2000 **faire**
  N prend la valeur $N + 1$
  U prend la valeur $1.2 \times U - 1$
  Somme prend la valeur *Somme* $+ U$
Fin Tant que
Afficher N

Remarque. Considérons la suite (g_n) définie par

$$g_n = \frac{1}{6}n^3 + \frac{5}{6}n + 1$$

pour tout entier n.

On note que

n	0	1	2	3
g_n	1	2	4	8

Ainsi, on a

$$\frac{g_1}{g_0} = \frac{g_2}{g_1} = \frac{g_3}{g_2} = 2$$

Mais, la suite (g_n) **n'est pas géométrique**. En effet, comme $g_4 = 15$,

$$\frac{g_4}{g_3} = \frac{15}{8} = 1.875 \neq 2$$

Facultatif

Exercice 3 (Suite de Fibonnacci)**.** Le but de cet exercice est, au travers de l'étude des suites (u_n) telles que :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad \text{pour tout entier } n, \qquad (\star)$$

de déterminer une expression du n-ème terme de la suite de Fibonacci en fonction de n.

1. Supposons que $u_n = q^n$ pour tout n avec q un nombre réel non nul. Soit n un entier naturel, alors d'après la relation $(\star)$, on a

$$\begin{aligned} q^{n+2} &= q^{n+1} + q^n \\ q^{n+2} - q^{n+1} - q^n &= 0 \\ q^n(q^2 - q - 1) &= 0 \\ q^2 - q - 1 &= 0 \qquad\qquad \text{car } q \neq 0 \end{aligned}$$

Ainsi (u_n) vérifie $(\star)$ si et seulement si q est une racine du polynôme $X^2 - X - 1$. Le discriminant du polynôme est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-1) = 5$. Ainsi, q peut valoir

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \qquad \text{ou} \qquad \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

2. Soit $q_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $q_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ les deux solutions de la question précédente. Soit a et b deux nombres réels. On considère la suite (v_n) définie par

$$v_n = a\, q_1^n + b\, q_2^n \quad \text{pour tout entier } n.$$

Soit n un entier naturel, par hypothèse sur q_1 et q_2, on a

$$\begin{aligned} v_{n+2} - v_{n+1} - v_n &= a\, q_1^{n+2} + b\, q_2^{n+2} - (a\, q_1^{n+1} + b\, q_2^{n+1}) - (a\, q_1^n + b\, q_2^n) \\ &= a(q_1^{n+2} - q_1^{n+1} - q_1^n) + b(q_2^{n+2} - q_2^{n+1} - q_2^n) \\ &= 0 \end{aligned}$$

C'est-à-dire la suite (v_n) vérifie aussi la propriété $(\star)$.

3. On rappelle que la suite de Fibonacci (w_n) est définie ainsi :

$$\begin{cases} w_0 &= 0 \\ w_1 &= 1 \\ w_{n+2} &= w_{n+1} + w_n \quad \text{pour tout entier } n \end{cases}$$

Essayons de déterminer a et b deux nombres tels que $w_n = aq_1^n + bq_2^n$ pour tout entier n. À l'aide des valeurs prises par w_0 et w_1, on déduit que

$$\begin{cases} 0 &= aq_1^0 + bq_2^0 \\ 1 &= aq_1^1 + bq_2^1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 0 &= a + b \\ 1 &= a\frac{1-\sqrt{5}}{2} + b\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$
$$\begin{cases} b &= -a \\ 1 &= a\frac{1-\sqrt{5}}{2} - a\frac{1+\sqrt{5}}{2} = -a\sqrt{5} \end{cases}$$
$$\begin{cases} b &= \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \\ a &= -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

Ainsi, d'après la question précédente, on déduit que

$$w_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

pour tout entier n.

Devoir maison 5 : Probabilités et suites

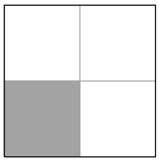
pour le jeudi 17 mars 2016

Exercice 1. On lance un dé dodécaédrique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 12.
Si la face obtenue est paire, le joueur gagne 1 point.
Si la face obtenue est un multiple de 3, le joueur gagne 3 points.
Si la face obtenue est supérieure ou égale à 10, le joueur gagne 4 points.
Sinon le joueur perd 5 points.
Ces gains sont cumulables si la face obtenue réalise plusieurs de ces conditions.

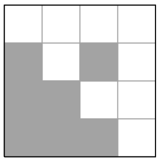
1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui associe à un lancer le gain obtenu.
2. Déterminer l'espérance mathématique $\mathbb{E}(X)$ de X. Ce jeu est-il équitable ?
3. Quel montant devrait-on réclamer au joueur lorsqu'il perd pour que le jeu soit équitable ?

Exercice 2. On effectue un coloriage en plusieurs étapes d'un carré de côté de longueur 2 cm.

Première étape du coloriage : On partage ce carré en quatre carrés de même aire et on colorie le carré situé en bas à gauche comme indiqué sur la figure ci-dessous (la figure n'est pas en vraie grandeur).



Deuxième étape du coloriage : On partage chaque carré non encore colorié en quatre carrés de même aire et on colorie dans chacun, le carré situé en bas à gauche, comme indiqué sur la figure ci-dessous.



On poursuit les étapes du coloriage en continuant le même procédé. Pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 1, on désigne par A_n l'aire, exprimée en cm^2, de la surface totale coloriée après n coloriages. On a ainsi $A_1 = 1$. La surface coloriée sur la figure à la 2$^{\text{e}}$ étape du coloriage a donc pour aire A_2.

1. Représenter la partie coloriée lors de la troisième étape.
2. Calculer A_2 puis montrer que $\mathrm{A}_3 = \dfrac{37}{16}$.
3. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $A_{n+1} = \dfrac{3}{4}\mathrm{A}_n + 1$.
4. On pose pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $\mathrm{B}_n = \mathrm{A}_n - 4$.
   a) Calculer B_1.
   b) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $\mathrm{B}_{n+1} = \dfrac{3}{4}\mathrm{B}_n$.
   c) Quelle est la nature de la suite (B_n) ?
   d) Exprimer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le terme général B_n de la suite (B_n) en fonction de n.
5. Quelle est la limite de A_n lorsque n tend vers $+\infty$?
   Donner une interprétation de ce résultat en rapport avec l'aire de la surface coloriée.

Le jeu des allumettes

Problème : On considère le jeu suivant qui se joue à deux (le joueur 1 et le joueur 2) :

Dans une boîte, il y a 300 allumettes. Chaque joueur à son tour peut prendre au plus la moitié des allumettes qui s'y trouvent. Celui qui ne peut plus jouer perd.

On dit qu'un joueur a une **stratégie gagnante** si il peut gagner indépendamment des choix fait par son adversaire. On suppose que le joueur 1 commence à jouer. Est-ce que, pour le jeu des allumettes, le joueur 1 a une stratégie gagnante ? Si oui, la donner.

Indications

1. Supposons que les deux joueurs arrivent à la situation suivante. Il reste 1 allumette dans la boîte et c'est au joueur 1 de jouer. Justifier que le joueur 2 a gagné.
2. Supposons que les deux joueurs arrivent à la situation suivante. Il reste 2 allumettes dans la boîte et c'est au joueur 1 de jouer. Justifier que le joueur 1 va gagner nécessairement.
3. Supposons que les deux joueurs arrivent à la situation suivante. Il reste 3 allumettes dans la boîte et c'est au joueur 1 de jouer. Justifier que le joueur 1 n'a pas de stratégie gagnante (par contre le joueur 2 en a une).
4. Supposons que les deux joueurs arrivent à la situation suivante. Il reste 4, 5 ou 6 allumettes dans la boîte et c'est au joueur 1 de jouer. Justifier que le joueur 1 a une stratégie gagnante.

Algorithme pour la simulation du jeu

Variables : N, A et B sont des nombres
Entrées : N prend la valeur 300
Traitement :
Tant que $N > 1$ **faire**
    Afficher le nombre d'allumettes N dans la boîte
    Demander au joueur 1 le nombre A d'allumettes qu'il veut prendre
    Si $A \leq \frac{N}{2}$ **alors** ▷ *On n'a pas le droit de prendre plus de la moitié des allumettes*
        N prend la valeur N - A
    Fin Si
    Si $N = 1$ **alors** ▷ *Le joueur 2 ne peut plus prendre d'allumettes*
        Afficher "le joueur 1 a gagné"
    Sinon
        Demander au joueur 2 le nombre B d'allumettes qu'il veut prendre
        Si $B \leq \frac{N}{2}$ ***alors***
            N prend la valeur N - B
        Fin Si
        Si $N = 1$ ***alors***
            Afficher "le joueur 2 a gagné"
        Fin Si
    Fin Si
Fin Tant que

Devoir maison 5 : Probabilités et suites

corrigé

Exercice 1. On lance un dé dodécaédrique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 12.
Si la face obtenue est paire, le joueur gagne 1 point.
Si la face obtenue est un multiple de 3, le joueur gagne 3 points.
Si la face obtenue est supérieure ou égale à 10, le joueur gagne 4 points.
Sinon le joueur perd 5 points.
Ces gains sont cumulables si la face obtenue réalise plusieurs de ces conditions.

1. Déterminons la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui associe à un lancer le gain obtenu.
   Dans un premier temps, nous allons déterminer le gain du joueur en fonction du résultat obtenu avec le dé.

dé	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
gain	-5	1	3	1	-5	1+3=4	-5	1	3	1+4=5	4	1+3+4=8

   On en déduit la loi de la variable alétoire X :

x	-5	1	3	4	5	8
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

2. L'espérance mathématique de X est

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{4}\times(-5)+\frac{1}{4}\times 1+\frac{1}{6}\times 3+\frac{1}{6}\times 4+\frac{1}{12}\times 5+\frac{1}{12}\times 8 = 1.25$$

   Comme, le gain moyen n'est pas nul, le jeu n'est pas équitable.

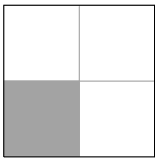
3. Posons m le nombre de points qu'on devrait perdre pour que le jeu soit équitable. Ainsi, au lieu d'avoir $P(X=-5)=\frac{1}{4}$, on a $P(X=-m)=\frac{1}{4}$. D'où

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{4}\times(-m)+\frac{1}{4}\times 1+\frac{1}{6}\times 3+\frac{1}{6}\times 4+\frac{1}{12}\times 5+\frac{1}{12}\times 8 = -\frac{1}{4}m+2.5 = 0$$

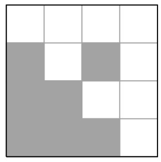
   implique que $m=10$. En résumé, pour que le jeu soit équitable il faut remplacer la perte de 5 points par une perte de 10 points.

Exercice 2. On effectue un coloriage en plusieurs étapes d'un carré de côté de longueur 2 cm.

Première étape du coloriage : On partage ce carré en quatre carrés de même aire et on colorie le carré situé en bas à gauche comme indiqué sur la figure ci-dessous (la figure n'est pas en vraie grandeur).

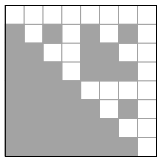


Deuxième étape du coloriage : On partage chaque carré non encore colorié en quatre carrés de même aire et on colorie dans chacun, le carré situé en bas à gauche, comme indiqué sur la figure ci-dessous.

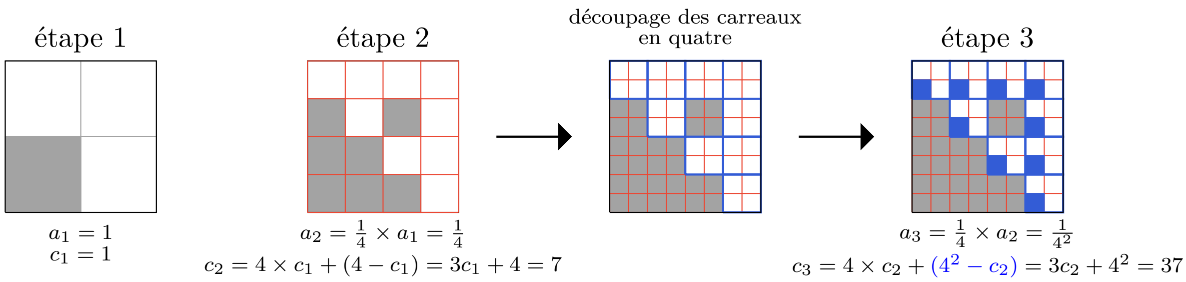


On poursuit les étapes du coloriage en continuant le même procédé. Pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 1, on désigne par A_n l'aire, exprimée en cm^2, de la surface totale coloriée après n coloriages. On a ainsi $A_1 = 1$. La surface coloriée sur la figure à la 2$^{\text{e}}$ étape du coloriage a donc pour aire A_2.

1. La partie coloriée lors de la troisième étape est :



2. Le grand carré étant de côté 2, son aire est 4 et il est découpé en 16 carreaux d'aire $\frac{1}{16} \times 4 = \frac{1}{4}$. D'où $A_2 = 7 \times \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$. De même, le grand carré est découpé en $4^3 = 64$ carreaux d'aire $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$ et on dénombre 37 carreaux grisés (sinon voir l'illustration donnée dans la question suivante), d'où $A_3 = \dfrac{37}{16}$.
3. Montrons que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $A_{n+1} = \dfrac{3}{4}\mathrm{A}_n + 1$. Voici, une illustration plus détaillée des trois premières étapes :



où l'on note a_n l'aire d'un carreaux et c_n le nombre de carreaux grisés lors de la n-ème étape. Soit n un entier naturel non nul, alors, à la n-ème étape, l'aire de la partie grisée est $A_n = a_n \times c_n$ et on note aussi qu'il y a en tout 4^n carreaux. Par définition, pour passer à l'étape suivante, on découpe chaque carreaux en quatre, d'où l'aire $a_{n+1} = \frac{1}{4} a_n a_1 \times \frac{1}{4^{n-1}} = \frac{1}{4^{n-1}}$, le nombre de carreaux a augmenté de 4 sur le quadrillage, ils sont donc au nombre de 4^{n+1} et le nombre de carreaux grisés est $c_{n+1} = 4 \times c_n + (4^n - c_n)$. Plus précisément, $4 \times c_n$ correspond au nombre de carreaux grisés après découpage des carreaux en 4 et $(4^n - c_n)$ correspond à l'ajout des carreaux grisés dans chacun des carreaux blancs.
Autre solution : On aurait aussi pu noter qu'à chaque étape on colorie un quart de la surface blanche en gris, d'où pour tout entier n, on a

$$A_{n+1} = A_n + \frac{1}{4}(4 - A_n) = \frac{3}{4}A_n + 1$$

4. On pose pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $\mathrm{B}_n = \mathrm{A}_n - 4$.
   a) $B_1 = A_1 - 4 = 1 - 4 = -3$.

b) Soit n un entier supérieur ou égal à 1, alors

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= A_{n+1} - 4 \\ &= \frac{3}{4}A_n + 1 - 4 \\ &= \frac{3}{4}(A_n - 4) \\ &= \frac{3}{4}B_n. \end{aligned}$$

c) De la question précédente, on déduit que la suite (B_n) est géométrique de raison $q = \frac{3}{4}$.

d) D'où, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $B_n = B_1 \times (\frac{3}{4})^{n-1} = -3(\frac{3}{4})^{n-1}$.

5. La raison de la suite (B_n) est positive et plus petite que 1 strictement, d'où la limite de (B_n) lorsque n tend vers $+\infty$ est 0.
Le terme $-B_n = 4 - A_n$ représente l'aire de la partie blanche à la n-ème étape. Or on vient de montrer que cette aire tend vers 0. Ainsi, l'aire de la surface coloriée tend vers 4 l'aire totale du carré.
Remarque : On aurait aussi pu noter que $A_n = 4 - 3 \times (\frac{3}{4})^{n-1}$ pour tout entier naturel n et en déduire que (A_n) tend vers 4.

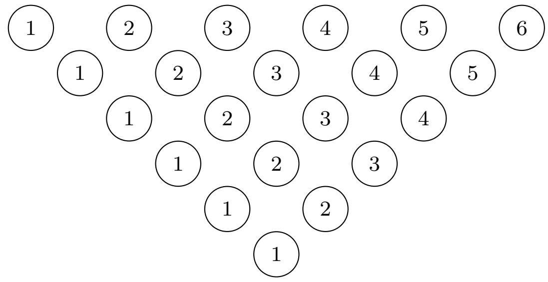
Code calculatrice du jeu des allumettes

<table>
<tr><th>Casio</th><th>Texas Instrument</th></tr>
<tr><td><pre>300→N
While N>1
"Allumettes":N◢
"Joueur 1":?→A↵
If A≤N|2↵
Then N-A→N↵
IfEnd
If N=1
Then "Joueur 1 a gagné"
Else
"Allumettes":N◢
"Joueur 2":?→B↵
If B≤N|2↵
Then N-B→N↵
IfEnd
If N=1
Then "Joueur 2 a gagné"
IfEnd
IfEnd
WhileEnd</pre></td><td><pre>300→N
While N>1
Disp "Allumettes"
Disp N
Disp "Joueur 1"
Input A
If A≤N|2
Then N-A→N
End
If N=1
Then "Joueur 1 a gagné"
Else
Disp "Allumettes"
Disp N
Disp "Joueur 2"
Input B
If B≤N|2
Then N-B→N
End
If N=1
Then "Joueur 2 a gagné"
End
End
End</pre></td></tr>
</table>

Devoir sur table 6 : Suites numériques, probabilités, dérivation

jeudi 24 mars 2016

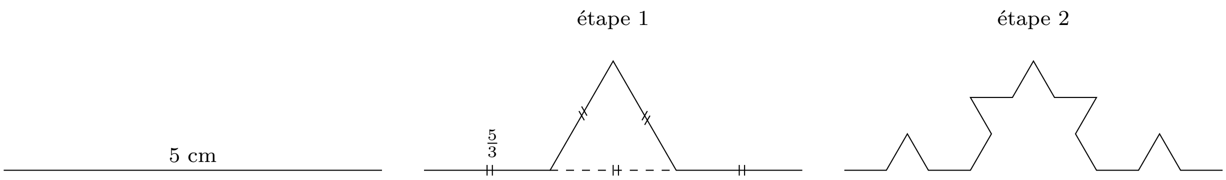
Exercice 1. Un sac contient les jetons numérotés ci-dessous.



On pioche au hasard un jeton du sac.

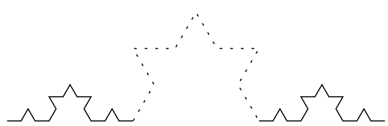
1. Un jeu est organisé ainsi : pour une mise de trois euros, on gagne autant d'euros qu'indiqué sur le jeton. On définit la variable aléatoire X qui associe le bénéfice d'un joueur.
   a) Déterminer l'ensemble des valeurs que X peut prendre.
   b) Déterminer la loi de probabilité de X.
   c) Calculer l'espérance mathématique $\mathbb{E}(X)$ de la variable aléatoire X et interpréter ce résultat.
   d) Calculer l'écart type $\sigma(X)$.
2. Pour rendre ce jeu équitable (c'est-à-dire tel que $\mathbb{E}(X) = 0$), on décide de modifier le gain correspondant au jeton numéroté 6.
   Déterminer le gain à effectuer au tirage du jeton numéro 6.

Exercice 2. On dispose au départ d'un chemin rectiligne de longueur 5cm. À chaque étape, on remplace les bouts de chemin rectiligne par “des détours en forme de triangles équilatéraux", voir figure ci-dessous :



À chaque étape n, on note u_n la longueur des segments, v_n le nombre de segments et L_n la longueur du chemin.

1. Observer que $u_1 = \frac{5}{3}$, $v_1 = 4$ et en déduire que $L_1 = \frac{20}{3}$.
2. Calculer u_2, v_2 et L_2.
3. Compléter le chemin obtenu à l'étape 3 :



4. Calculer u_3, v_3 et L_3.
5. Quelle est la nature de la suite (u_n), de la suite (v_n) ?
6. Justifier que $u_n = \frac{5}{3^n}$ pour tout entier naturel n.
7. Montrer que pour tout entier n, on a $L_n = 5 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n$.
8. Déterminer le rang n_0 à partir du quel on a $L_n \geq 1$ km pour tout $n \geq n_0$.
9. Conjecturer la limite de la suite (L_n).

Exercice 3. Soit n un entier naturel et f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On rappelle que si pour tout nombre réel x, $f(x) = x^n$ alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$f'(x) = n\,x^{n-1}$$

1. Déterminer la dérivée de $f(x) = x^n$ pour $n = 1$, 2, 3 et 4.
2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4x^3 - 5x^2 + 1.2x + 4.5$. Déterminer sa fonction dérivée g'.
3. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = (x+3)\,(x^2 - 4)$$

On associe u et v définies par $u(x) = x + 3$ et $v(x) = x^2 - 4$.

a) Calculer $u'(x)$ et $v'(x)$.

b) On rappelle la formule de dérivation du produit de deux fonctions : $(uv)' = u'v + uv'$. Compléter les calculs suivants :

$$\begin{aligned} h'(x) &= u'(x) \times \ldots + u(x) \times \ldots \\ &= 1 \times (\ldots) + (x+3) \times (\ldots) \\ &= \ldots \end{aligned}$$

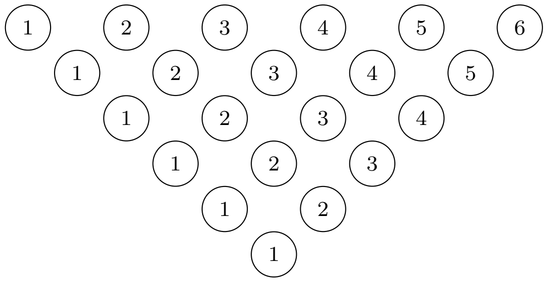
Facultatif **Exercice 4.**

1. Soit f la fonction carrée sur $\mathbb{R}$: $f(x) = x^2$. Soit a un nombre réel.
   a) Soit h un nombre réel non nul, montrer que $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = 2a + h$.
   b) En déduire $f'(a)$.
2. Soit f la fonction cube sur $\mathbb{R}$: $f(x) = x^3$. Soit a un nombre réel.
   a) Soit h un nombre réel non nul, montrer que $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = 3a^2 + 3ah + h^2$.
   b) En déduire $f'(a)$.
3. Soit f la fonction racine carrée sur l'intervalle $]0;+\infty[$: $f(x) = \sqrt{x}$. Soit $a > 0$ un nombre réel.
   a) Soit h un nombre réel non nul, montrer que $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$.
   b) En déduire $f'(a)$.
4. Soit f la fonction inverse sur l'intervalle $]0;+\infty[$: $f(x) = \frac{1}{x}$. Soit $a > 0$ un nombre réel.
   a) Soit h un nombre réel non nul, montrer que $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{-1}{(a+h)a}$.
   b) En déduire $f'(a)$.

Devoir sur table 6 : Suites numériques, probabilités, dérivation

corrigé

Exercice 1. Un sac contient les jetons numérotés ci-dessous.



On pioche au hasard un jeton du sac.

1. Un jeu est organisé ainsi : pour une mise de trois euros, on gagne autant d'euros qu'indiqué sur le jeton. On définit la variable aléatoire X qui associe le bénéfice d'un joueur.
   a) Les différents gains possibles à ce jeu sont $-3+1=-2$, $-3+2=-1$, $-3+3=0$, $-3+4=1$, 2, 3. D'où l'ensemble des valeurs que X peut prendre est $\{-2,-1,0,1,2,3\}$.
   b) On note qu'il y a $\frac{6\times 7}{2}=21$ jetons dans le sac. L'événement "X=-2" correspond à l'événement tirer une boule avec le numéro 1. Comme, il y a 6 jetons avec le numéro un et que l'expérience est équiprobable, on a $\mathbb{P}(X=-2)=\frac{6}{21}=\frac{2}{7}$. De même, on compléte le tableau de probabilités suivant :

x_i	-2	-1	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X=x_i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{21}$

   c) L'espérance mathématique $\mathbb{E}(X)$ de la variable aléatoire X est

$$\mathbb{E}(X)=\frac{2}{7}\times(-2)+\frac{5}{21}\times(-1)+\frac{4}{21}\times 0+\frac{1}{7}\times 1+\frac{2}{21}\times 2+\frac{1}{21}\times 3=\frac{-7}{21}=\frac{-1}{3}$$

   En moyenne, le joueur perd environ 33 cents.
   d) Notons que la moyenne quadratique est :

$$\mathbb{E}(X^2)=\frac{2}{7}\times(-2)^2+\frac{5}{21}\times(-1)^2+\frac{4}{21}\times 0^2+\frac{1}{7}\times 1^2+\frac{2}{21}\times 2^2+\frac{1}{21}\times 3^2=\frac{7}{3}$$

   D'où la variance de X est $V(X)=\mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2=\frac{7}{3}-(\frac{-1}{3})^2=\frac{20}{3}$. Ainsi, l'écart type de X est $\sigma(X)=\sqrt{\frac{20}{3}}\simeq 1.49$.
2. Pour rendre ce jeu équitable (c'est-à-dire tel que $\mathbb{E}(X)=0$), on décide de modifier le gain correspondant au jeton numéroté 6.
   Notons a le gain du joueur lorsqu'il tire le jeton numéro 6, alors la loi de X est :

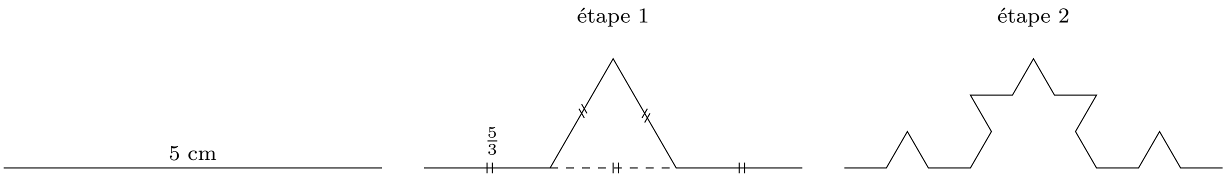
x_i	-2	-1	0	1	2	a
$\mathbb{P}(X=x_i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{21}$

D'où,

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(X) & = & 0 \\ \dfrac{2}{7}\times(-2)+\dfrac{5}{21}\times(-1)+\dfrac{4}{21}\times 0+\dfrac{1}{7}\times 1+\dfrac{2}{21}\times 2+\dfrac{1}{21}\times a & = & 0 \\ \dfrac{-10+a}{21} & = & 0 \\ a & = & 10 \end{array}$$

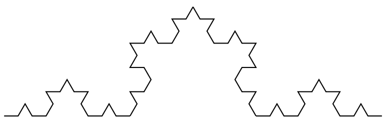
Ainsi, pour que le jeu soit équitable, il faut que le gain associé au jeton numéro 6 soit de $a+3=13$€.

Exercice 2. On dispose au départ d'un chemin rectiligne de longeur 5cm. À chaque étape, on remplace les bouts de chemin rectiligne par “des détours en forme de triangles équilatéraux", voir figure ci-dessous :



À chaque étape n, on note u_n la longueur des segments, v_n le nombre de segments et L_n la longueur du chemin.

1. Il est immédiat que $u_1=\frac{5}{3}$, $v_1=4$. Enfin, $L_1=u_1\times v_1=\frac{20}{3}$.
2. On a $u_2=\frac{1}{3}\times u_1=\frac{5}{9}$, $v_2=4v_1=16$ et $L_2=u_2\times v_2=\frac{5\times16}{9}=\frac{80}{9}$.
3. Étape 3 :



4. On a $u_3=\frac{1}{3}v_2=\frac{5}{27}$, $v_3=4\times v_2=64$ et $L_3=u_3\times v_3=\frac{320}{27}$.
5. On note qu'à chaque étape, on divise la longueur des segments par trois, d'où la relation de récurrence $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n$ et la suite (u_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$. D'autre part, à chaque étape, le nombre de segments est multiplier par 4, d'où la relation de récurrence $v_{n+1}=4v_n$ et la suite (v_n) est géométrique de raison 4.
6. Comme la suite (u_n) est géométrique, on déduit que $u_n=u_1\times\frac{1}{3^{n-1}}=\frac{5}{3^n}$ pour tout entier naturel n.
7. De même, la suite (v_n) est géométrique et $v_n=v_1\times 4^{n-1}=4^n$ pour tout entier naturel n. Par définition, on note que la longueur L_n du chemin à l'étape n est égale au nombre de ségments fois la longueur de l'un d'eux. C'est-à-dire $L_n=u_n\times v_n$. On en déduit que $L_n=u_n\times v_n=\frac{5}{3^n}\times 4^n=5\times\left(\frac{4}{3}\right)^n$ pour tout entier naturel n.
8. Rappelons que $1\,\text{km}=100\ 000\,\text{cm}$. À l'aide de la calculatrice, on note que $L_{35}>100\ 000$cm. Comme la suite (L_n) est croissante (car sa raison est supérieur strictement à 1), on déduit que pour tout entier $n\geq 35$, on a $L_n\geq 1$ km.
9. En calculant les premières valeurs et de la question précédente, on peut conjecturer que la suite (L_n) tend vers l'infini.

Exercice 3. Soit n un entier naturel et f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On rappelle que si pour tout nombre réel x, $f(x) = x^n$ alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$f'(x) = n\,x^{n-1}$$

1. Pour $n = 1$: $f(x) = x$ et sa dérviée $f'(x) = 1\,x^0 = 1$; Pour $n = 2$: $f(x) = x^2$ et sa dérviée $f'(x) = 2\,x^1 = 2\,x$; Pour $n = 3$: $f(x) = x^3$ et sa dérviée $f'(x) = 3\,x^2$; Pour $n = 4$: $f(x) = x^4$ et sa dérviée $f'(x) = 4\,x^3$;
2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4x^3 - 5x^2 + 1.2x + 4.5$. Alors, sa fonction dérivée est
$$g'(x) = 4 \times 3\,x^2 - 5 \times 2\,x + 1.2 = 12x^2 - 10x + 1.2$$
3. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par
$$h(x) = (x+3)\,(x^2-4)$$
On associe u et v définies par $u(x) = x+3$ et $v(x) = x^2-4$.
   a) On a $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 2x$.
   b) On rappelle la formule de dérivation du produit de deux fonctions : $(uv)' = u'v + uv'$. Compléter les calculs suivants :
$$\begin{aligned} h'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ &= 1 \times (x^2 - 4) + (x+3) \times (2x) \\ &= x^2 - 4 + 2x^2 + 6x \\ &= 3x^2 + 6x - 4 \end{aligned}$$

Facultatif **Exercice 4.**

1. Soit f la fonction carrée sur $\mathbb{R}$: $f(x) = x^2$. Soit a un nombre réel.
   a) Soit h un nombre réel non nul,
$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \frac{h(2a+h)}{h} = 2a + h$$
   b) En faisant tendre h vers 0 dans l'expression précédente, on déduit que pour tout réel a,
$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} 2a + h = 2a$$
2. Soit f la fonction cube sur $\mathbb{R}$: $f(x) = x^3$. Soit a un nombre réel.
   a) Soit h un nombre réel non nul,
$$\begin{aligned} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{(a+h)^3 - a^3}{h} \\ &= \frac{(a+h)(a+h)^2 - a^3}{h} \\ &= \frac{(a+h)(a^2 + 2ah + h^2) - a^3}{h} \\ &= \frac{a^3 + 3a^2\,h + 3a\,h^2 + h^3 - a^3}{h} \\ &= \frac{h(3a^2 + 3a\,h + h^2)}{h} \\ &= 3a^2 + 3ah + h^2 \end{aligned}$$

b) En faisant tendre h vers 0 dans l'expression précédente, on déduit que pour tout réel a,

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} 3a^2 + 3ah + h^2 = 3a^2$$

3. Soit f la fonction racine carrée sur l'intervalle $]0; +\infty[$: $f(x) = \sqrt{x}$. Soit $a > 0$ un nombre réel.

a) Soit h un nombre réel non nul,

$$\begin{aligned}
\frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} \\
&= \frac{(\sqrt{a+h} - \sqrt{a})(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} \\
&= \frac{a + h - a}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} \\
&= \frac{h}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} \\
&= \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}
\end{aligned}$$

b) En faisant tendre h vers 0 dans l'expression précédente, on déduit que pour tout réel a strictement posifif,

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

4. Soit f la fonction inverse sur l'intervalle $]0; +\infty[$: $f(x) = \frac{1}{x}$. Soit $a > 0$ un nombre réel.

a) Soit h un nombre réel non nul,

$$\begin{aligned}
\frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} \\
&= \frac{(a+h)a \times (\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a})}{(a+h)a \times h} \\
&= \frac{a - (a + h}{(a+h)\,a\,h} \\
&= \frac{-1}{(a+h)a}
\end{aligned}$$

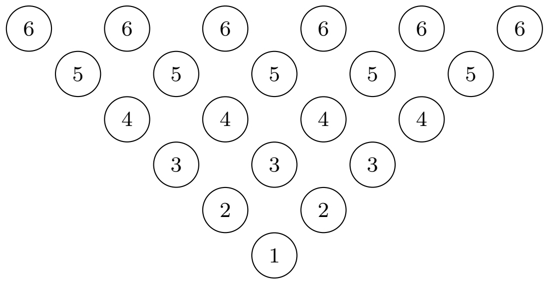
b) En faisant tendre h vers 0 dans l'expression précédente, on déduit que pour tout réel a non nul,

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{(a+h)a} = \frac{-1}{a^2}$$

Devoir sur table 6 : Suites numériques, probabilités, dérivation (bis)

vendredi 1er avril 2016

Exercice 1. Un sac contient les jetons numérotés ci-dessous.



On pioche au hasard un jeton du sac.

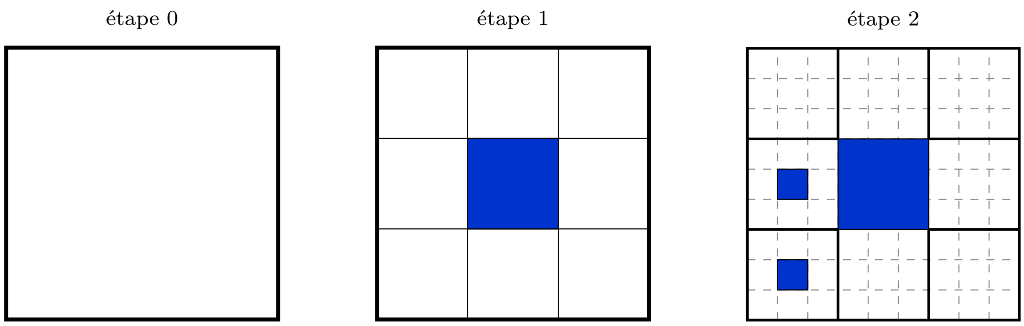
1. Un jeu est organisé ainsi : pour une mise de trois euros, on gagne autant d'euros qu'indiqué sur le jeton. On définit la variable aléatoire X qui associe le bénéfice (final) du joueur.
   a) Supposons que le joueur tire le jeton numéro 6, justifier qu'il gagne finalement 3 euros.
   b) Déterminer l'ensemble des valeurs que X peut prendre.
   c) Déterminer la loi de probabilité de X.
   d) Calculer l'espérance mathématique $\mathbb{E}(X)$ de la variable aléatoire X et interpréter ce résultat.
   e) Calculer l'écart type $\sigma(X)$.
2. Pour rendre ce jeu équitable (c'est-à-dire tel que $\mathbb{E}(X) = 0$), on décide de modifier le gain correspondant au jeton numéroté 1.
   Déterminer le gain à effectuer au tirage du jeton numéro 1.

Exercice 2 (Le tapis de Sierpinski)**.** Un carré de $1\,\mathrm{m}^2$ est divisé en neuf carrés égaux comme indiqué sur la figure ci-dessous. On colorie le carré central en gris (étape 1).

Les huit carrés restants sont à leur tout divisés en neuf carrés égaux comme indiqué sur la figure. On colorie les huit carrés centraux obtenus en gris (étape 2).

On continue de la même façon à colorier puis diviser le carré.

Pour tout entier naturel n, on désigne par A_n l'aire en m^2 de la surface totale coloriée après n coloriages.



1. Calculer A_1.
2. Compléter l'étape 2 sur la figure précédente.
3. Calculer A_2.
4. En remarquant qu'à chaque étape, on colorie $\frac{1}{9}$ de la partie non coloriée, justifier que, pour tout entier naturel n non nul, on a
$$A_{n+1} = \frac{8}{9}A_n + \frac{1}{9}$$
5. On pose, pour tout entier naturel n non nul, $B_n = A_n - 1$.
   a) Démontrer que la suite (B_n) est géométrique de raison $\frac{8}{9}$.
   b) Exprimer B_n en fonction de n.
6. En déduire que $A_n = 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n$ pour tout entier naturel non nul n.
7. À l'aide de la calculatrice, observer les valeurs de la suite (A_n) lorsque n devient grand. Conjecturer la limite de la suite (A_n) lorsque n tend vers l'infini.
8. * Aurait-on pu prédire la limite de la suite (A_n) à l'aide de la construction géométrique ?

Exercice 3. Soit n un entier naturel et f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On rappelle que si pour tout nombre réel x, $f(x) = x^n$ alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a
$$f'(x) = n\,x^{n-1}$$

1. Déterminer la dérivée de $f(x) = x^n$ pour $n = 1$, 2, 5 et 12.
2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 7x^4 - 3.1x^2 + 1.2x - 5.4$. Déterminer sa fonction dérivée g'.
3. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par
$$h(x) = (2x-5)\left(x^2+1\right)$$
On associe u et v définies par $u(x) = 2x - 5$ et $v(x) = x^2 + 1$.
   a) Calculer $u'(x)$ et $v'(x)$.
   b) On rappelle la formule de dérivation du produit de deux fonctions : $(uv)' = u'v + uv'$. Compléter les calculs suivants :
$$\begin{aligned} h'(x) &= u'(x) \times \ldots + u(x) \times \ldots \\ &= 2 \times (\ldots) + (2x-5) \times (\ldots) \\ &= \ldots \end{aligned}$$

Dérivation et étude de variations (sujet A)

mercredi 30 mars 2016

Exercice 1. Pour chacune des fonctions suivantes, donner son ensemble de dérivabilité puis calculer sa dérivée.

1. $f(x) = x^2 - 5x + 1$;
2. $f(x) = x^{1000} + \sqrt{3}\,x + 3\sqrt{x}$;
3. $f(x) = 1 - \frac{12}{x}$;

On rappelle les formules de dérivations :

$$(uv)' = u'v + uv' \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2} \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$$

Exercice 2. On se donne u et v deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 4x^2 - 5$ et $v(x) = x^3 + 4x$.

1. Calculer $u'(x)$ et $v'(x)$.
2. On considère la fonction produit $g = u \times v$ définie sur $\mathbb{R}$ par
$$g(x) = (4x^2 - 5)\,(x^3 + 4x)$$
   a) Déterminer le domaine de dérivabilité de g.
   b) Compléter les calculs suivants :
$$\begin{aligned} g'(x) &= u'(x) \times \ldots + u(x) \times \ldots \\ &= 8x \times (\ldots) + (4x^2 - 5) \times (\ldots) \\ &= \ldots \end{aligned}$$
3. On considère la fonction inverse $h = \frac{1}{v}$ définie sur $\mathbb{R}$ par
$$h(x) = \frac{1}{x^3 + 4x}$$
   a) Résoudre $x^3 + 4x = 0$.
   b) En déduire le domaine de dérivabilité de h.
   c) Compléter les calculs suivants :
$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{-\ \ldots}{v(x)^2} \\ &= \frac{-\ \ldots}{(x^3 + 4x)^2} \end{aligned}$$
4. On considère la fonction quotient $k = \frac{u}{v}$ définie sur $\mathbb{R}$ par
$$k(x) = \frac{4x^2 - 5}{x^3 + 4x}$$
   a) Déterminer le domaine de dérivabilité de k.
   b) Compléter les calculs suivants :
$$\begin{aligned} k'(x) &= \frac{u'(x) \times \ldots - \ldots \times (\ldots)}{v(x)^2} \\ &= \frac{(\ldots) \times (x^3 + 4x) - (4x^2 - 5) \times \ldots}{(x^3 + 4x)^2} \\ &= \ldots \end{aligned}$$

Exercice 3. Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sqrt{x}(2x+3)$;
2. $f(x) = (x^3 - x)(x^2 - 4)$;
3. $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$;
4. $f(x) = \frac{3}{x^3-1}$;
5. $f(x) = \frac{3x+1}{2x-5}$;
6. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$;
7. $f(x) = \frac{x^2-7x+3}{-2x+5}$;
8. $f(x) = (\frac{3}{4}x + \frac{4}{3})^2$.

Exercice 4. Dresser le tableau de signes des expressions suivantes :

a) $3x+1$;

b) $-4x+6$;

c) $(3x+1)(-4x+6)$;

d) $(x+5)^2+1$;

e) x^2+x+1 ;

f) $x^2-3x-10$;

g) $\frac{3x+1}{x-5}$.

Exercice 5. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 6x^2 - 96x - 67$

1. Montrer que $f'(x) = 3(x+8)(x-4)$;
2. Dresser le tableau de signes de $f'(x)$.
3. On rappelle que le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse a.
   À l'aide du tableau de signes de $f'(x)$, conjecturer le tableau de variations de la fonction f elle-même.

Exercice 6.

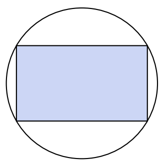
1. Dresser le tableau de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 4x + 16$;
2. On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 3x + \frac{1}{x}$.
   a) Montrer que $f'(x) = \frac{3x^2-1}{x^2}$.
   b) En déduire le tableau de variations de f.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ par $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x^2-1}$.

Exercice 7 (*). Soit $v : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et qui ne s'annule par sur un intervalle I. Soit a un nombre appartenant à l'intervalle I et h un nombre réel non nul tel que $a+h$ appartienne aussi à I.

On pose $f : I \to \mathbb{R}$ la fonction inverse de v définie par $f(x) = \frac{1}{v(x)}$.

1. Montrer que
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{1}{v(a)v(a+h)} \left(\frac{v(a) - v(a+h)}{h} \right)$$
2. En déduire $f'(a)$ en fonction de $v'(a)$ et $v(a)$.

Exercice 8 (*). On considère un rectangle inscrit dans un cercle de rayon un. Déterminer les dimensions du rectangle pour que son aire soit maximale.



Dérivation et étude de variations (sujet A)

corrigé

Exercice 1. Pour chacune des fonctions suivantes, donner son ensemble de dérivabilité puis calculer sa dérivée :

1. $f(x) = x^2 - 5x + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée $f'(x) = 2x - 5$;
2. $f(x) = x^{1000} + \sqrt{3}\,x + 3\sqrt{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et sa dérivée est $f'(x) = 1000\,x^{999} + \sqrt{3} + \frac{3}{2\sqrt{x}}$;
3. $f(x) = 1 - \frac{12}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est $f'(x) = \frac{12}{x^2}$.

On rappelle les formules de dérivations :

$$(uv)' = u'v + uv' \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2} \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$$

Exercice 2. On se donne u et v deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 4x^2 - 5$ et $v(x) = x^3 + 4x$.

1. Alors $u'(x) = 8x$ et $v'(x) = 3x^2 + 4$.
2. On considère la fonction produit $g = u \times v$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = (4x^2 - 5)\,(x^3 + 4x)$$

   a) La fonction g est un produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc elle est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$.

   b) Ainsi, pour tout nombre réel x, on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(w) \\ &= 8x \times (x^3 + 4x) + (4x^2 - 5) \times (3x^2 + 4) \\ &= 8x^4 + 32x^2 + 12x^4 + 16x^2 - 15x^2 - 20 \\ &= 20x^4 + 33x^2 - 20 \end{aligned}$$

3. On considère la fonction inverse $h = \frac{1}{v}$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = \frac{1}{x^3 + 4x}$$

   a) On note que

$$\begin{aligned} x^3 + 4x &= 0 \\ x \times (x^2 + 4) &= 0 \\ x = 0 \qquad \text{ou} \qquad x^2 + 4 &= 0 \end{aligned}$$

   or $x^2 + 4 \geq 4 > 0$, ainsi $x^2 + 4 = 0$ n'admet pas de solution. On en déduit que la première équation admet une unique solution $x = 0$.

   b) D'après la question précédente, la fonction v ne s'annule qu'en 0, ainsi le domaine de dérivabilité de l'inverse h est $\mathbb{R}^*$.

   c) On a :

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{-\,v'(x)}{v(x)^2} \\ &= \frac{-\,(3x^2 + 4)}{(x^3 + 4x)^2} \end{aligned}$$

4. On considère la fonction quotient $k = \frac{u}{v}$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$k(x) = \frac{4x^2 - 5}{x^3 + 4x}$$

a) Encore une fois, comme le dénominateur $v(x)$ ne s'annule qu'en 0, on en déduit que le domaine de dérivabilité de k est aussi $\mathbb{R}^*$.

b) On a :

$$\begin{aligned} k'(x) &= \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{v(x)^2} \\ &= \frac{(8x) \times (x^3 + 4x) - (4x^2 - 5) \times (3x^2 + 4)}{(x^3 + 4x)^2} \\ &= \frac{8x^4 + 32x^2 - (12x^4 + 16x^2 - 15x^2 - 20)}{(x^3 + 4x)^2} \\ &= \frac{8x^4 + 32x^2 - 12x^4 - 16x^2 + 15x^2 + 20}{(x^3 + 4x)^2} \\ &= \frac{-4x^4 + 31x^2 + 20}{(x^3 + 4x)^2} \end{aligned}$$

Exercice 3. Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sqrt{x}(2x + 3)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}(2x + 3) + \sqrt{x}\,(2) \\ &= \frac{2x}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{2\sqrt{x}} + 2\sqrt{x} && \textit{rappelons que } \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x} \\ &= \sqrt{x} + \frac{3}{2}\frac{\sqrt{x}}{x} + 2\sqrt{x} \\ &= 3\sqrt{x} + \frac{3}{2}\frac{\sqrt{x}}{x} && \textit{simplifions davantage :} \\ &= \frac{3\sqrt{x}\,x + \frac{3}{2}\sqrt{x}}{x} \\ &= \frac{\sqrt{x}(3x + \frac{3}{2})}{x} \end{aligned}$$

Les deux derniers calculs permettent d'arriver à une expression dont l'étude du signe est presque immédiate.

2. $f(x) = (x^3 - x)(x^2 - 4)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (3x^2 - 1)(x^2 - 4) + (x^3 - x)(2x) \\ &= 3x^4 - 12x^2 - x^2 + 4 + 2x^4 - 2x^2 \\ &= 5x^4 - 15x^2 + 4 \end{aligned}$$

3. $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$:

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$$

4. $f(x) = \frac{3}{x^3-1}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \times \frac{-3x^2}{(x^3-1)^2} \\ &= \frac{-9x^2}{(x^3-1)^2} \end{aligned}$$

5. $f(x) = \frac{3x+1}{2x-5}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3)\,(2x-5)-(3x+1)\,(2)}{(2x-5)^2} \\ &= \frac{6x-15-6x-2}{(2x-5)^2} \\ &= \frac{-17}{(2x-5)^2} \end{aligned}$$

6. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1)-\sqrt{x}(1)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\sqrt{x}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x}}{x}-\sqrt{x}}{(x-1)^2} \\ &= \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{x}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x}}{x}}{(x-1)^2} \qquad = -\frac{\sqrt{x}}{2x} \times \frac{x+1}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

7. $f(x) = \frac{x^2-7x+3}{-2x+5}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-7)(-2x+5)-(x^2-7x+3)(-2)}{(-2x+5)^2} \\ &= \frac{-4x^2+10x+14x-35+2x^2-14x+6}{(-2x+5)^2} \\ &= \frac{-2x^2+10x-29}{(-2x+5)^2} \end{aligned}$$

8. $f(x) = (\frac{3}{4}x+\frac{4}{3})^2$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3}{4}(\frac{3}{4}x+\frac{4}{3})+(\frac{3}{4}x+\frac{4}{3})\frac{3}{4} \\ &= \frac{3}{2}(\frac{3}{4}x+\frac{4}{3}) \end{aligned}$$

Exercice 4. Dresser le tableau de signes des expressions suivantes :

a) b) c)

x	$-\infty$		$\frac{-1}{3}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$3x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$-4x+6$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$(3x+1)(-4x+6)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

d) Comme un nombre au carré est positif, on en déduit que $(x+5)^2+1 \geq 1 > 0$ pour tout nombre réel x ;

e) Le discriminant du polynôme x^2+x+1 est $\Delta = b^2-4ac = 1^2-4\times1\times1 = -3$ est négatif, le polynôme est du signe de son coefficient dominant $a=1$. C'est-à-dire x^2+x+1 est positif pour nombre réel x.

f) Notons que $x^2-3x-10 = (x+2)(x-5)$ et le polynôme du second degré $x^2-3x-10$ admet deux racines $x_1=-2$ et $x_2=5$. Comme le coefficient dominant $a=1$ est positif, le polynôme $x^2-3x-10$ est négatif sur l'intervalle $[-2;5]$ et positif sinon.

g) Pour déterminer le signe de $\frac{3x+1}{x-5}$, nous allons refaire un tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{-1}{3}$		5		$+\infty$
$3x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{3x+1}{x-5}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

Exercice 5. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3+6x^2-96x-67$

1. On note que $f'(x) = 3x^2+12x-96 = 3(x^2+4x-32)$ et $3(x+8)(x-4) = 3(x^2+4x-32)$, d'où $f'(x) = 3(x+8)(x-4)$.
2. 3) Le tableau de signes de $f'(x)$ et de variations de $f(x)$.

x	$-\infty$		-8		4		$+\infty$
$x+8$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	573	$\searrow$	-291	$\nearrow$	

Exercice 6.

1. Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3-4x+16$ alors sa dérivée est définie par $f'(x) = 3x^2-4 = 3(x^2-\frac{4}{3}) = 3(x-\frac{2}{\sqrt{3}})(x+\frac{2}{\sqrt{3}})$, ainsi :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{\sqrt{3}}$		$\frac{2}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$x+\frac{2}{\sqrt{3}}$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-\frac{2}{\sqrt{3}}$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$-\frac{16}{3\sqrt{3}}+16$	$\searrow$	$\frac{16}{3\sqrt{3}}+16$	$\nearrow$	

2. On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 3x+\frac{1}{x}$.
   a) Alors $f'(x) = 3-\frac{1}{x^2} = \frac{3x^2-1}{x^2}$.
   b) Le numérateur $3x^2-1$ de $f'(x)$ est un polynôme du second degré admettant deux racines $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, d'où

x	0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
x^2	0	$+$		$+$	
$3x^2-1$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|\|$	$\searrow$	$2\sqrt{3}$	$\nearrow$	

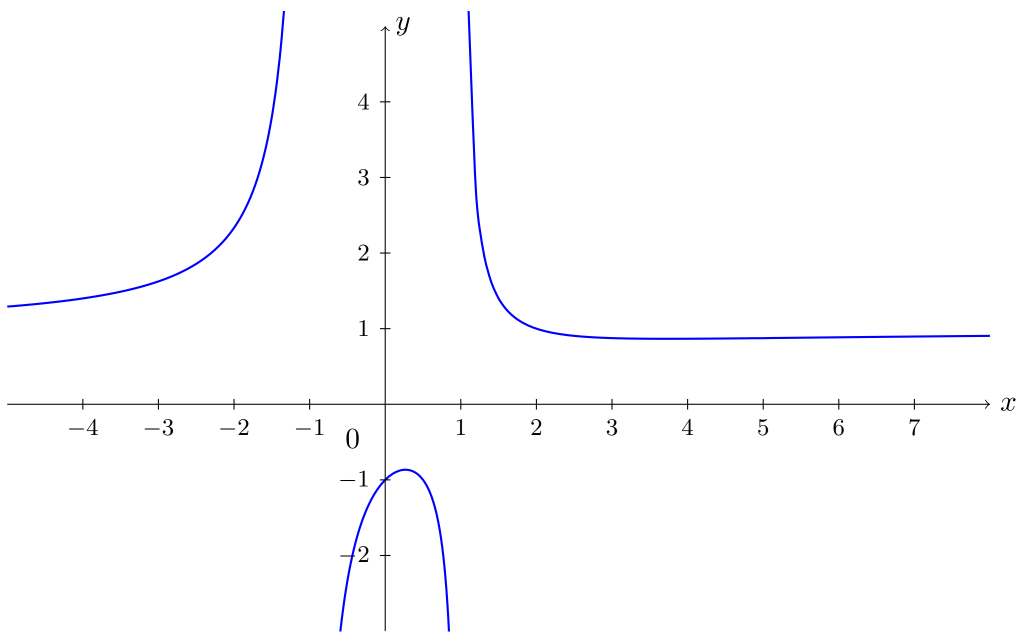
3. Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ par $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x^2-1}$. Sa dérivée est définie par

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-1)(x^2-1) - (x^2-x+1)(2x)}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{2x^3 - 2x - x^2 + 1 - 2x^3 + 2x^2 - 2x}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{x^2-4x+1}{(x^2-1)^2} \end{aligned}$$

On note que le numérateur est un polynôme du second degré avec un coefficient dominant positif et deux racines $x_1 = 2 - \sqrt{3}$ et $x_2 = 2 + \sqrt{3}$, d'où le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		-1		$2-\sqrt{3}$		1		$2+\sqrt{3}$		$+\infty$
x^2-4x+1		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$(x^2-1)^2$		$+$	0	$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\|\|$	$\nearrow$		$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$		$\nearrow$	

Voici la représentation graphique de la fonction f :



Dérivation et étude de variations (sujet B)

mercredi 30 mars 2016

Exercice 1. Pour chacune des fonctions suivantes, donner son ensemble de dérivabilité puis calculer sa dérivée.

1. $f(x) = x^2 + 15x - 1$;
2. $f(x) = x^{512} + \sqrt{5}\,x + 5\sqrt{x}$;
3. $f(x) = 7 - \frac{13}{x}$;

On rappelle les formules de dérivations :

$$(uv)' = u'v + uv' \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2} \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$$

Exercice 2. On se donne u et v deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 7x^2 - 3$ et $v(x) = x^3 + 9x$.

1. Calculer $u'(x)$ et $v'(x)$.
2. On considère la fonction produit $g = u \times v$ définie sur $\mathbb{R}$ par
$$g(x) = (7x^2 - 3)\,(x^3 + 9x)$$
   a) Déterminer le domaine de dérivabilité de g.
   b) Compléter les calculs suivants :
$$\begin{aligned} g'(x) &= u'(x) \times \ldots + u(x) \times \ldots \\ &= 14x \times (\ldots) + (7x^2 - 3) \times (\ldots) \\ &= \ldots \end{aligned}$$
3. On considère la fonction inverse $h = \frac{1}{v}$ définie sur $\mathbb{R}$ par
$$h(x) = \frac{1}{x^3 + 9x}$$
   a) Résoudre $x^3 + 9x = 0$.
   b) En déduire le domaine de dérivabilité de h.
   c) Compléter les calculs suivants :
$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{-\ \ldots}{v(x)^2} \\ &= \frac{-\ \ldots}{(x^3 + 9x)^2} \end{aligned}$$
4. On considère la fonction quotient $k = \frac{u}{v}$ définie sur $\mathbb{R}$ par
$$k(x) = \frac{7x^2 - 3}{x^3 + 9x}$$
   a) Déterminer le domaine de dérivabilité de k.
   b) Compléter les calculs suivants :
$$\begin{aligned} k'(x) &= \frac{u'(x) \times \ldots - \ldots \times \ldots}{v(x)^2} \\ &= \frac{(\ldots) \times (x^3 + 9x) - (7x^2 - 3) \times \ldots}{(x^3 + 9x)^2} \\ &= \ldots \end{aligned}$$

Exercice 3. Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sqrt{x}(3x+2)$;
2. $f(x) = (x^4 - x)(x^2 - 1)$;
3. $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$;
4. $f(x) = \frac{5}{x^3+1}$;
5. $f(x) = \frac{7x-3}{2x+5}$;
6. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$;
7. $f(x) = \frac{x^2-5x+2}{-7x+3}$;
8. $f(x) = (\frac{5}{6}x + \frac{6}{5})^2$.

Exercice 4. Dresser le tableau de signes des expressions suivantes :

a) $4x+1$;

b) $-5x+10$;

c) $(4x+1)(-5x+10)$;

d) $(x+3)^2+1$;

e) x^2-x+1 ;

f) $x^2+3x-10$;

g) $\frac{4x+1}{x-3}$.

Exercice 5. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 6x^2 - 96x + 67$

1. Montrer que $f'(x) = 3(x+8)(x-4)$;
2. Dresser le tableau de signes de $f'(x)$.
3. On rappelle que le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse a.
   À l'aide du tableau de signes de $f'(x)$, conjecturer le tableau de variations de la fonction f elle-même.

Exercice 6.

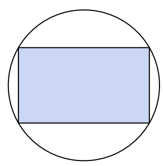
1. Dresser le tableau de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 36x + 6$;
2. On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$.
   a) Montrer que $f'(x) = \frac{2x^2-1}{x^2}$.
   b) En déduire le tableau de variations de f.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$ par $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2-2}$.

Exercice 7 (*). Soit $v : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et qui ne s'annule par sur un intervalle I. Soit a un nombre appartenant à l'intervalle I et h un nombre réel non nul tel que $a+h$ appartienne aussi à I.

On pose $f : I \to \mathbb{R}$ la fonction inverse de v définie par $f(x) = \frac{1}{v(x)}$.

1. Montrer que
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{1}{v(a)v(a+h)} \left(\frac{v(a) - v(a+h)}{h} \right)$$
2. En déduire $f'(a)$ en fonction de $v'(a)$ et $v(a)$.

Exercice 8 (*). On considère un rectangle inscrit dans un cercle de rayon un. Déterminer les dimensions du rectangle pour que son aire soit maximale.



Dérivation et étude de variations (sujet B)

corrigé

Exercice 1. Pour chacune des fonctions suivantes, donner son ensemble de dérivabilité puis calculer sa dérivée.

1. $f(x) = x^2 + 15x - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x + 15$.
2. $f(x) = x^{512} + \sqrt{5}\,x + 5\sqrt{x}$ est dérivable sur $]0;\ +\infty[$ et $f'(x) = 512x^{511} + \sqrt{5} + \frac{5}{2\sqrt{x}}$.
3. $f(x) = 7 - \frac{13}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(x) = \frac{13}{x^2}$.

On rappelle les formules de dérivations :

$$(uv)' = u'v + uv' \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2} \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$$

Exercice 2. On se donne u et v deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 7x^2 - 3$ et $v(x) = x^3 + 9x$.

1. On a $u'(x) = 7 \times 2x = 14x$ et $v'(x) = 3x^2 + 9$.
2. On considère la fonction produit $g = u \times v$ définie sur $\mathbb{R}$ par
$$g(x) = (7x^2 - 3)\,(x^3 + 9x)$$
   a) La fonction g est un produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc g est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$.
   b) On a :
$$\begin{aligned} g'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ &= 14x \times (x^3 + 9x) + (7x^2 - 3) \times (3x^2 + 9) \\ &= 14x^4 + 126x^2 + 21x^4 + 63x^2 - 9x^2 - 27 \\ &= 35x^4 + 180x^2 - 27 \end{aligned}$$
3. On considère la fonction inverse $h = \frac{1}{v}$ définie sur $\mathbb{R}$ par
$$h(x) = \frac{1}{x^3 + 9x}$$
   a)
$$\begin{aligned} x^3 + 9x &= 0 \\ x(x^2 + 9) &= 0 \end{aligned}$$
   or $x^2 + 9 \geq 9 > 0$, d'où la première équation admet une unique solution $x = 0$.
   b) D'après la question précédente, le dénominateur de h ne s'annule pas lorsque x est non nu. D'où le domaine de dérivabilité de h est $\mathbb{R}^*$.
   c) On a :
$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{-\,v'(x)}{v(x)^2} \\ &= \frac{-\,(3x^2 + 9)}{(x^3 + 9x)^2} \\ &= \frac{-3x^2 - 9}{(x^3 + 9x)^2} \end{aligned}$$

4. On considère la fonction quotient $k = \frac{u}{v}$ définie sur $\mathbb{R}$ par
$$k(x) = \frac{7x^2 - 3}{x^3 + 9x}$$
   a) Comme nous l'avons vu le dénominateur de k, $x^3 + 9x$ est non nul lorsque $x \neq 0$, d'où le domaine de dérivabilité de k est $\mathbb{R}^*$.
   b) On a :
$$\begin{aligned} k'(x) &= \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{v(x)^2} \\ &= \frac{(14x) \times (x^3 + 9x) - (7x^2 - 3) \times (3x^2 + 9)}{(x^3 + 9x)^2} \\ &= \frac{14x^4 + 126x^2 - (21x^4 + 63x^2 - 9x^2 - 27)}{(x^3 + 9x)^2} \\ &= \frac{14x^4 + 126x^2 - 21x^4 - 63x^2 + 9x^2 + 27}{(x^3 + 9x)^2} \\ &= \frac{-7x^4 + 72x^2 + 27}{(x^3 + 9x)^2} \end{aligned}$$

Exercice 3. Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sqrt{x}(3x + 2)$:
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}(3x + 2) + \sqrt{x}\,(3) \\ &= \frac{3x}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{2\sqrt{x}} + 3\sqrt{x} && \textit{rappelons que } \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x} \\ &= \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{x} + 3\sqrt{x} \\ &= \frac{9}{2}\sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{x} && \textit{simplifions davantage :} \\ &= \frac{\frac{9}{2}\sqrt{x}\,x + \sqrt{x}}{x} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\frac{9}{2}x + 1)}{x} \end{aligned}$$
   Les deux derniers calculs permettent d'arriver à une expression dont l'étude du signe est presque immédiate.
2. $f(x) = (x^4 - x)(x^2 - 1)$:
$$\begin{aligned} f'(x) &= (4x^3 - 1)(x^2 - 1) + (x^4 - x)(2x) \\ &= 4x^5 - 4x^3 - x^2 + 1 + 2x^5 - 2x^2 \\ &= 6x^5 - 4x^3 - 3x^2 + 1 \end{aligned}$$
3. $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$:
$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$$
4. $f(x) = \frac{5}{x^3+1}$:
$$\begin{aligned} f'(x) &= 5 \times \frac{-3x^2}{(x^3 + 1)^2} \\ &= \frac{-15x^2}{(x^3 + 1)^2} \end{aligned}$$

5. $f(x) = \frac{7x-3}{2x+5}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(7)(2x+5)-(7x-3)(2)}{(2x+5)^2} \\ &= \frac{14x+35-14x+6}{(2x+5)^2} \\ &= \frac{41}{(2x+5)^2} \end{aligned}$$

6. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1)-\sqrt{x}\times(1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\sqrt{x}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x}}{x}-\sqrt{x}}{(x+1)^2} \\ &= \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{x}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x}}{x}}{(x+1)^2} \\ &= \frac{\sqrt{x}}{2x}\times\frac{-x+1}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

7. $f(x) = \frac{x^2-5x+2}{-7x+3}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-5)(-7x+3)-(x^2-5x+2)(-7)}{(-7x+3)^2} \\ &= \frac{-14x^2+6x+35x-15+7x^2-35x+14}{(-7x+3)^2} \\ &= \frac{-7x^2+6x-1}{(-7x+3)^2} \end{aligned}$$

8. $f(x) = (\frac{5}{6}x+\frac{6}{5})^2$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{5}{6}(\frac{5}{6}x+\frac{6}{5})+(\frac{5}{6}x+\frac{6}{5})\frac{5}{6} \\ &= \frac{5}{3}(\frac{5}{6}x+\frac{6}{5}) \end{aligned}$$

Exercice 4. Dresser le tableau de signes des expressions suivantes :

a) b) c)

x	$-\infty$		$\frac{-1}{4}$		2		$+\infty$
$4x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$-5x+10$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$(4x+1)(-5x+10)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

d) Comme un nombre au carré est positif, on en déduit que $(x+3)^2+1 \geq 1 > 0$ pour tout nombre réel x ;

e) Le discriminant du polynôme x^2-x+1 est $\Delta = b^2-4ac = (-1)^2-4\times1\times1 = -3$ est négatif, le polynôme est du signe de son coefficient dominant $a = 1$. C'est-à-dire x^2-x+1 est positif pour nombre réel x.

f) Notons que $x^2+3x-10=(x-2)(x+5)$ et le polynôme du second degré $x^2+3x-10$ admet deux racines $x_1=-5$ et $x_2=2$. Comme le coefficient dominant $a=1$ est positif, le polynôme $x^2+3x-10$ est négatif sur l'intervalle $[-5;2]$ et positif sinon.

g) Pour déterminer le signe de $\frac{4x+1}{x-3}$, nous allons refaire un tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{-1}{4}$		3		$+\infty$
$4x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{4x+1}{x-3}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Exercice 5. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+6x^2-96x+67$

1. On note que $f'(x)=3x^2+12x-96=3(x^2+4x-32)$ et $3(x+8)(x-4)=3(x^2+4x-32)$, d'où $f'(x)=3(x+8)(x-4)$.
2. 3) Le tableau de signes de $f'(x)$ et de variations de $f(x)$.

x	$-\infty$		-8		4		$+\infty$
$x+8$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	707	$\searrow$	-157	$\nearrow$	

Exercice 6.

1. Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-36x+6$ alors sa dérivée est définie par $f'(x)=3x^2-36=3(x^2-12)=3(x-2\sqrt{3})(x+2\sqrt{3})$, ainsi :

x	$-\infty$		$-2\sqrt{3}$		$2\sqrt{3}$		$+\infty$
$x+2\sqrt{3}$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2\sqrt{3}$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$-48\sqrt{3}+6$	$\searrow$	$48\sqrt{3}+6$	$\nearrow$	

2. On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=2x+\frac{1}{x}$.

   a) Alors $f'(x)=2-\frac{1}{x^2}=\frac{2x^2-1}{x^2}$.

   b) Le numérateur $2x^2-1$ de $f'(x)$ est un polynôme du second degré admettant deux racines $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, d'où

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
x^2	0	$+$		$+$	
$2x^2-1$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$	$\searrow$	$2\sqrt{2}$	$\nearrow$	

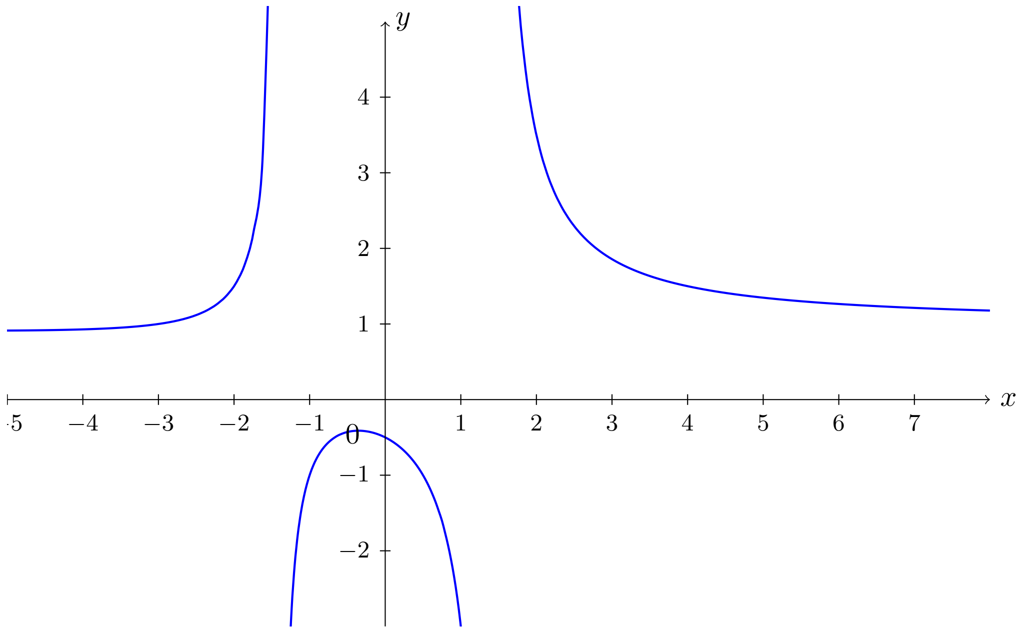
3. Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}-\{-\sqrt{2};\ \sqrt{2}\}$ par $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2-2}$. Sa dérivée est définie par

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(2x+1)(x^2-2)-(x^2+x+1)(2x)}{(x^2-2)^2}\\
&= \frac{2x^3-4x+x^2-2-2x^3-2x^2-2x}{(x^2-2)^2}\\
&= \frac{-x^2-6x-2}{(x^2-2)^2}
\end{aligned}$$

On note que le numérateur est un polynôme du second degré avec un coefficient dominant positif et deux racines $x_1=-3-\sqrt{7}$ et $x_2=-3+\sqrt{7}$, d'où le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		$-3-\sqrt{7}$		$-\sqrt{2}$		$-3+\sqrt{7}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$-x^2-6x-2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$(x^2-2)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

Voici la représentation graphique de la fonction f :



Dérivation et étude de variations (facultatif)

corrigé

Exercice 7 (*). Soit $v : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et qui ne s'annule par sur un intervalle I. Soit a un nombre appartenant à l'intervalle I et h un nombre réel non nul tel que $a+h$ appartienne aussi à I.

On pose $f : I \to \mathbb{R}$ la fonction inverse de v définie par $f(x) = \frac{1}{v(x)}$.

1. Alors,

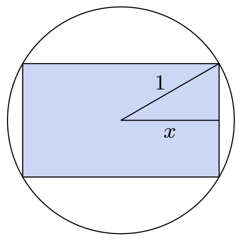
$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{\frac{1}{v(a+h)} - \frac{1}{v(a)}}{h} \\ &= \frac{\frac{v(a)-v(a+h)}{v(a+h)\,v(a)}}{h} \\ &= \frac{1}{v(a)v(a+h)}\left(\frac{v(a)-v(a+h)}{h}\right)\end{aligned}$$

2. Ainsi, en passant à la limite, on a

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{v(a)v(a+h)}\left(\frac{v(a)-v(a+h)}{h}\right) = \frac{1}{v(a)\,v(a)}\,(-v'(a)) = \frac{-v'(a)}{v(a)^2}$$

La formule du cours.

Exercice 8 (*). On considère un rectangle inscrit dans un cercle de rayon un. Déterminons les dimensions du rectangle pour que son aire soit maximale : Notons x la moitié de la longueur du rectangle.
À l'aide du théorème de Pythagore, on déduit que l'aire du rectangle est égale à



$$A(x) = 2x \times 2\sqrt{1-x^2} = 4\sqrt{x^2}\times\sqrt{1-x^2} = 4\sqrt{x^2(1-x^2)} = 4\sqrt{x^2-x^4}$$

La fonction carrée étant croissante, le sens de variation de $A(x)$ est le même que celui de la fonction $u(x) = x^2 - x^4$.
Sur l'intervalle $[0;1]$, on note que $u'(x) = 2x - 4x^3 = 2x(1-2x^2)$ s'annule lorsque $x = 0$ ou $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
De plus le polynôme du second degré $1 - x^2$ est positif sur l'intervalle $[-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}]$ et négatif sinon.
D'où

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
$2x$	0	$+$		$+$	
$1-2x^2$		$+$	0	$-$	
$u'(x)$		$+$	0	$-$	
$u(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0
$A(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

Lorsque $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, la longueur du rectangle vaut $L = 2x = \sqrt{2}$ et la largeur $l = 2\sqrt{1-x^2} = \sqrt{2}$. D'où, l'aire est maximale lorsque le rectangle est un carré de côté $\sqrt{2}$ et son aire vaut 2.

Devoir sur table 7 : Dérivation (sujet A)

mercredi 27 avril 2016

Exercice 1. Compléter les phrases suivantes :

1. $(u \times v)' =$
2. $(\frac{1}{u})' =$
3. Si $f(x) = x^3$, alors $f'(x) =$
4. Si $f(x) = \sqrt{x}$, alors $f'(x) =$
5. Si $f(x) = 3x^2 - 5x + \frac{4}{3}$, alors $f'(x) =$.
6. Si $f(x) = (x+1)(x-2)$, alors $f'(x) =$
7. Si $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$, alors $f'(x) =$

Exercice 2 (Étude de fonction)**.** Une entreprise fabrique et commercialise un produit chimique. La capacité de production est limitée à 9 tonnes par jour.
On note $C(x)$ le coût total en milliers d'euros pour fabriquer x tonnes. La fonction C est définie sur l'intervalle $[0; 9]$ par $C(x) = 0.2x^2 + 3.2$. Ce produit est vendu 2 000 euros la tonne, ainsi la recette en milliers d'euros obtenue en vendant x tonnes de ce produit est $R(x) = 2\,x$ milliers d'euros.

1. Déterminer le montant en euros des coûts lorsque la production est nulle (Cette somme correspond à ce qu'on appelle : "les coûts fixes").
2. On note $B(x)$ le bénéfice lorsque l'entreprise produit et vend x tonnes de produit. Justifier qu'on a $B(x) = -0.2x^2 + 2x - 3.2$.
3. Déterminer la fonction dérivée B' de B sur $[0; 9]$.
4. Étudier le signe de $B'(x)$ et en déduire le tableau de variations de B sur $[0; 9]$.
5. Déduire de ce qui précède le bénéfice maximal que l'entreprise peut réaliser, en précisant la production journalière correspondante.

Exercice 3.

1. Dresser le tableau de signes de l'expression $10 - 3\,b$.
2. Soit b un nombre réel et f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{2x + b}{3x + 5}$$

   a) Déterminer le domaine de dérivabilité $\mathcal{D}$ de f.
   b) Calculer $f'(x)$ pour tout x dans $\mathcal{D}$.
   c) On suppose que $b \neq \frac{10}{3}$. En fonction du paramètre b, déterminer le tableau de variations de f.
   d) On suppose que $b = \frac{10}{3}$, que peut-on dire de la fonction f dans ce cas ?

Devoir sur table 7 : Dérivation (sujet B)

mercredi 27 avril 2016

Exercice 1. Compléter les phrases suivantes :

1. $(\frac{u}{v})' =$
2. $(\frac{1}{v})' =$
3. Si $f(x) = x^2$, alors $f'(x) =$
4. Si $f(x) = \frac{1}{x}$, alors $f'(x) =$
5. Si $f(x) = -7x^2 + 10x - \frac{4}{3}$, alors $f'(x) =$
6. Si $f(x) = (x-1)(x+2)$, alors $f'(x) =$
7. Si $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$, alors $f'(x) =$

Exercice 2 (Étude de fonction)**.** Une entreprise fabrique et commercialise un produit chimique. La capacité de production est limitée à 9 tonnes par jour.
On note $C(x)$ le coût total en milliers d'euros pour fabriquer x tonnes. La fonction C est définie sur l'intervalle $[0; 9]$ par $C(x) = 0.2x^2 + 3.2$. Ce produit est vendu 2 000 euros la tonne, ainsi la recette en milliers d'euros obtenue en vendant x tonnes de ce produit est $R(x) = 2\,x$ milliers d'euros.

1. Déterminer le montant en euros des coûts lorsque la production est nulle (Cette somme correspond à ce qu'on appelle : "les coûts fixes").
2. On note $B(x)$ le bénéfice lorsque l'entreprise produit et vend x tonnes de produit. Justifier qu'on a $B(x) = -0.2x^2 + 2x - 3.2$.
3. Déterminer la fonction dérivée B' de B sur $[0; 9]$.
4. Étudier le signe de $B'(x)$ et en déduire le tableau de variations de B sur $[0; 9]$.
5. Déduire de ce qui précède le bénéfice maximal que l'entreprise peut réaliser, en précisant la production journalière correspondante.

Exercice 3.

1. Dresser le tableau de signes de l'expression $10 - 3\,b$.
2. Soit b un nombre réel et f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{2x+b}{3x+5}$$

   a) Déterminer le domaine de dérivabilité $\mathcal{D}$ de f.
   b) Calculer $f'(x)$ pour tout x dans $\mathcal{D}$.
   c) On suppose que $b \neq \frac{10}{3}$. En fonction du paramètre b, déterminer le tableau de variations de f.
   d) On suppose que $b = \frac{10}{3}$, que peut-on dire de la fonction f dans ce cas ?

Devoir sur table 7 : Dérivation

corrigé

Exercice 1. Compléter les phrases suivantes :

1. $(u \times v)' = u'\,v + u\,v'$
2. $(\frac{1}{u})' = \frac{-u'}{u^2}$
3. Si $f(x) = x^3$, alors $f'(x) = 3x^2$
4. Si $f(x) = \sqrt{x}$, alors $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
5. Si $f(x) = 3x^2 - 5x + \frac{4}{3}$, alors $f'(x) = 6x - 5$.
6. Si $f(x) = (x+1)(x-2)$, alors $f'(x) = 1 \times (x-2) + (x+1) \times 1 = 2x - 1$
7. Si $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$, alors $f'(x) = \frac{1\times(x-2)-(x+1)\times 1}{(x-2)^2} = \frac{-3}{(x-2)^2}$

Exercice 1. Compléter les phrases suivantes :

1. $(\frac{u}{v})' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$
2. $(\frac{1}{v})' = \frac{-v'}{v^2}$
3. Si $f(x) = x^2$, alors $f'(x) = 2x$
4. Si $f(x) = \frac{1}{x}$, alors $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$
5. Si $f(x) = -7x^2 + 10x - \frac{4}{3}$, alors $f'(x) = -14x + 10$
6. Si $f(x) = (x-1)(x+2)$, alors $f'(x) = 1 \times (x+2) + (x-1) \times 1 = 2x + 1$
7. Si $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$, alors $f'(x) = \frac{1\times(x+2)-(x-1)\times 1}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2}$

Exercice 2. Une entreprise fabrique et commercialise un produit chimique. La capacité de production est limitée à 9 tonnes par jour.
On note $C(x)$ le coût total en milliers d'euros pour fabriquer x tonnes. La fonction C est définie sur l'intervalle $[0; 9]$ par $C(x) = 0.2x^2 + 3.2$. . Ce produit est vendu 2 000 euros la tonne, ainsi la recette en milliers d'euros obtenue en vendant x tonnes de ce produit est $R(x) = 2\,x$ milliers d'euros.

1. Le montant en euros des coûts lorsque la production est nulle est $C(0) = 3.2$ milliers d'euros (Cette somme correspond à ce qu'on appelle : "les coûts fixes").
2. On note $B(x)$ le bénéfice lorsque l'entreprise produit et vend x tonnes de produit. Alors, $B(x) = R(x) - C(x) = -0.2x^2 + 2x - 3.2$.
3. La fonction dérivée B' de B sur $[0; 9]$ est définie par
$$B'(x) = -0.2 \times 2x + 2 = -0.4x + 2$$
4. La fonction $B'(x)$ est affine de coefficient directeur -0.4 négatif et
$$B'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -0.4x + 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{-2}{-0.4} = 5.$$
Ainsi, $B'(x)$ est positif lorsque $x \leq 5$ et négatif sinon. On en déduit le tableau de variations de B sur $[0; 9]$:

x	0		5		9
$B'(x) = -0.4x + 2$		+	0	-	
$B(x) = -0.2x^2 + 2x - 3.2$	-3.2	↗	1.8	↘	-1.4

5. De ce qui précède, on déduit que le bénéfice maximal que l'entreprise peut réaliser est de 1 800 euros en produisant et vendant 5 tonnes par jour.

Exercice 3.

1. La fonction $b \mapsto 10-3b$ est une fonction affine qui s'annule lorsque $b = \frac{10}{3}$ et donc le coefficient directeur est négatif, d'où

b	$-\infty$	$\frac{10}{3}$	$+\infty$
$10-3b$	$+$	0	$-$

2. Soit b un nombre réel et f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{2x+b}{3x+5}$$

a) On note que le dénominateur de $f(x)$ s'annule lorsque $x = \frac{-5}{3}$, d'où le domaine de dérivabilité $\mathcal{D}$ de f est $]-\infty; -\frac{-5}{3}[\cup]\frac{-5}{3}; +\infty[$.

b) Soit x dans $\mathcal{D}$, alors

$$f'(x) = \frac{2\times(3x+5)-(2x+b)\times 3}{(3x+5)^2} = \frac{6x+10-6x-3b}{(3x+5)^2} = \frac{10-3b}{(3x+5)^2}$$

c) On suppose que $b \neq \frac{10}{3}$. Distinguons deux cas, :

- Si $b < \frac{10}{3}$, alors d'après la question 1, $10-3b$ est positif. On en déduit que $f'(x)$ est positif pour tout nombre réel x. D'où f est croissante sur les intervalles $]-\infty; -\frac{-5}{3}[$ et $]\frac{-5}{3}; +\infty[$.
- Si $b > \frac{10}{3}$, alors d'après la question 1, $10-3b$ est négatif. On en déduit que $f'(x)$ est négatif pour tout nombre réel x. D'où f est décroissante sur les intervalles $]-\infty; -\frac{-5}{3}[$ et $]\frac{-5}{3}; +\infty[$.

d) On suppose que $b = \frac{10}{3}$, alors pour tout nombre réel $x \neq \frac{-5}{3}$,

$$f(x) = \frac{2x+\frac{10}{3}}{3x+5} = \frac{\frac{2}{3}(3x+5)}{3x+5} = \frac{2}{3}$$

Ainsi, la fonction f s'identifie avec la fonction constante égale à $\frac{2}{3}$ sur le domaine $\mathcal{D}$.

Devoir sur table 7 : Dérivation (bis)

lundi 2 mai 2016

Exercice 1. Compléter les phrases suivantes :

1. $(\frac{u}{v})' =$
2. $(\frac{1}{v})' =$
3. Si $f(x) = x^7 + x^{14}$, alors $f'(x) =$
4. Si $f(x) = \frac{1}{x} - \sqrt{x}$, alors $f'(x) =$
5. Si $f(x) = -3.1x^2 + 10.3x - \sqrt{3}$, alors $f'(x) =$
6. Si $f(x) = (5x - \frac{1}{2})(\frac{3x+7}{2})$, alors $f'(x) =$
7. Si $f(x) = \frac{4x-1}{x+12}$, alors $f'(x) =$

Exercice 2 (Étude de fonction)**.** Une entreprise fabrique et commercialise un produit chimique. La capacité de production est limitée à 9 tonnes par jour.
On note $C(x)$ le coût total en milliers d'euros pour fabriquer x tonnes. La fonction C est définie sur l'intervalle $[0; 9]$ par $C(x) = 0.2x^2 + x + 3.2$. Ce produit est vendu 2 000 euros la tonne, ainsi la recette en milliers d'euros obtenue en vendant x tonnes de ce produit est $R(x) = 2\,x$ milliers d'euros.

1. Déterminer le montant en euros des coûts lorsque la production est nulle (Cette somme correspond à ce qu'on appelle : "les coûts fixes").
2. On note $B(x)$ le bénéfice lorsque l'entreprise produit et vend x tonnes de produit. Justifier qu'on a $B(x) = -0.2x^2 + x - 3.2$.
3. Déterminer la fonction dérivée B' de B sur $[0; 9]$.
4. Étudier le signe de $B'(x)$ et en déduire le tableau de variations de B sur $[0; 9]$.
5. Déduire de ce qui précède le bénéfice maximal que l'entreprise peut réaliser, en précisant la production journalière correspondante.

Exercice 3.

1. Dresser le tableau de signes de l'expression $5 - 2\,b$.
2. Dresser le tableau de signes de l'expression $\frac{5-2b}{3b+1}$.
3. Soit d un nombre réel et f la fonction définie par
$$f(x) = 1 + \frac{5-2b}{2x+5}$$
   a) Déterminer le domaine de dérivabilité $\mathcal{D}$ de f.
   b) Calculer $f'(x)$ pour tout x dans $\mathcal{D}$.
   c) On suppose que $b \neq \frac{-5}{2}$. En fonction du paramètre b, déterminer le tableau de variations de f.

Devoir maison 7 : Dérivation, loi binomiale et révisions

pour le lundi 16 mai 2016

Exercice 1.
1. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + \frac{1}{7}x - 5$. Dresser le tableau de variations de f.
2. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^3 - 3x^2 - 2x + 3$. Dresser le tableau de variations de f.
3. On considère la fonction f définie par
$$f(x) = \frac{2x^2 + x + 2}{2x + 1}$$
   a) Déterminer le domaine de dérivabilité de f.
   b) Dresser le tableau de variations de f.

Exercice 2. *Dans tout l'exercice, on arrondira les résultats à 10^{-3} près.*

Alors qu'Anne se rend à son lycée cinq jours par semaine, elle a constaté qu'elle a une probabilité de $0,065$ d'arriver en retard le matin.

Partie A : Durant une semaine On note X le nombre de jours où elle est arrivée en retard au lycée.
1. Quelle hypothèse doit-on faire pour que X suive une loi binomiale ?
   Dans ce cas, préciser les paramètres n et p.
   Dans la suite on admettra que X suit bien cette loi.
2. Déterminer la probabilité qu'elle arrive en retard deux fois dans la semaine.
3. En moyenne, combien de jours va-t-elle arriver en retard durant la semaine ?
4. Quelle est la probabilité qu'elle soit toujours à l'heure durant la semaine ?

Partie B : Durant l'année L'année scolaire compte 36 semaines.
1. Durant une année scolaire, sur combien de semaines complètes Anne « peut-elle compter » ?
2. Quelle est la probabilité qu'elle soit à l'heure pendant au moins 30 semaines complètes ?

Partie C : Comme un lundi
1. Quel est le nombre moyen de lundis où Anne sera à l'heure durant une année scolaire ?
2. Quelle est la probabilité que durant une semaine donnée, elle soit en retard au moins le lundi et le vendredi ?

Exercice 3.
1. À l'aide du triangle de Pascal, lire $\binom{7}{4}$, $\binom{5}{2}$, $\binom{5}{3}$ et $\binom{5}{4}$.
2. Démontrer que si $n \geq 2$ et $0 \leq k \leq n - 2$, alors on la relation suivante
$$\binom{n+2}{k+2} = \binom{n}{k} + 2\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2}$$

Les exercices suivants sont facultatifs.

Exercice 4 (Repère du plan). On considère un triangle ABC non aplati. Le point D est tel que $\overrightarrow{AD} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. I est le milieu du segment $[AB]$ et J celui de $[CD]$.

1. a) Faire la figure.
   b) Le point E est tel que $3\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{0}$. En déduire que $\overrightarrow{ED} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{DB}$ puis construire le point E.
   c) Le point F est tel que $3\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{0}$. De même, construire le point F.
   d) Construire le point K milieu de $[EF]$.
2. On se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
   a) Déterminer les coordonnées des points dans ce repère.
   b) Montrer que les points I, K et J sont alignés et préciser la position de K sur le segment $[IJ]$.

Exercice 5 (Probabilités). On souhaite comparer deux jeux de hasard en étudiant les variables aléatoires X et Y qui associent à chaque jeu le gain correspondant en euros. Les lois de probabilité de X et Y sont les suivantes :

x_i	-2	1	2	5	10
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

y_i	-5	1	2	5	10
$\mathbb{P}(Y = y_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

1. Vérifier que les tableaux ci-dessus décrivent bien des lois de probabilités.
2. Calculer les espérances de X et Y. À l'aide de ce calcul, comparer les deux jeux.
3. Calculer les écarts type de X et Y. À l'aide de ce calcul, comparer les deux jeux.

Exercice 6 (Suites numériques). Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = -1; \\ u_{n+1} = 3\,u_n + 7, \quad \forall\, n \geq 0. \end{cases}$$

Soit c, d deux nombres réels. On pose $v_n = cu_n + d$ pour tout entier naturel n.

1. Exprimer v_{n+1} en fonction de u_n.
2. Déterminer c et d tels que $v_{n+1} = 3v_n$.
3. En déduire une expression de v_n en fonction de n.
4. Soit $S = u_0 + \ldots + u_{10}$.
   a) Calculer $T = v_0 + \ldots + v_{10}$.
   b) En revenant à la définition de v_n, exprimer S en fonction de T. En déduire la valeur de S.

TP : loi binomiale

Exercice 1.

1. Éxécuter plusieurs fois le programme suivant :

```
VARIABLES
X EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  X PREND_LA_VALEUR ALGOBOX_ALEA_ENT(0,3)
  SI (X > 0) ALORS
    DEBUT_SI
    X PREND_LA_VALEUR 1
    FIN_SI
  AFFICHER X
FIN_ALGORITHME
```

Justifier que le programme simule une variable aléatoire X de Bernoulli de paramètre $\frac{3}{4}$.

2. Écrire un programme qui simule 10 fois l'expérience de Bernoulli de paramètre $\frac{3}{4}$ et retourne la somme Y.
3. Justifier que Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{3}{4}$.

AlgoBox : Deux commandes :

- Pour calculer le nombre $\binom{n}{k}$ avec algobox, on utilise la fonction :
  `ALGOBOX_COEFF_BINOMIAL(n,k)`
- Pour calculer le nombre x^k, on utilise la fonction :
  `pow(x, k)`

Exercice 2. Soit Y une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{3}{4}$.

1. Compléter le programme suivant pour qu'il affiche les différentes probabilités $P(Y = k)$.

```
VARIABLES
k EST_DU_TYPE NOMBRE
n EST_DU_TYPE NOMBRE
p EST_DU_TYPE NOMBRE
P EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  n PREND_LA_VALEUR 10
  p PREND_LA_VALEUR 3/4
  POUR k ALLANT_DE 0 A n
    DEBUT_POUR
    AFFICHER "\nP( Y = "
    AFFICHER k
    AFFICHER " ) = "
    P PREND_LA_VALEUR ...
    AFFICHER P
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

2. Déterminer (à l'aide d'un programme ou pas) les nombres a et b tels que :
   - a est le plus entier tel que $P(Y \leq a) > 0.025$;
   - b est le plus petit entier tel que $P(Y \leq b) \geq 0.975$.

   C'est-à-dire, tels que $[\frac{a}{10}; \frac{b}{10}]$ soit un intervalle de fluctuation au seuil 95% de la fréquence $\frac{Y}{10}$.

Exercice 3. Ecrire un programme qui demande les valeurs n et p et qui renvoie les bornes de l'intervalle de fluctuation au seuil 95% de la fréquence $F = \frac{X}{n}$ où X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; k)$.

Exercice 4. Écrire un programme un programme qui demande les valeurs n et p et qui renvoie l'espérance d'une variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Exercice 5 (Facultatif)**.**
Résoudre le problème 53 à l'adresse `https://projecteuler.net/problem=53`.

Indication : Pour résoudre le problème, il peut être utile de coder dans une liste L les coefficients $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$ et pour passer à l'étape suivante $(n+1)$ d'utiliser la relation de Pascal.
Un exemple d'utilisation d'une liste avec Algobox :

```
VARIABLES
l EST_DU_TYPE LISTE
k EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  POUR k ALLANT_DE 1 A 10
    DEBUT_POUR
    l[k] PREND_LA_VALEUR k
    FIN_POUR
  POUR k ALLANT_DE 1 A 10
    DEBUT_POUR
    AFFICHER l[k]
    AFFICHER ", "
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

TP : loi binomiale

corrigé

Exercice 1.

1. Éxécuter plusieurs fois le programme suivant :

```
VARIABLES
X EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  X PREND_LA_VALEUR ALGOBOX_ALEA_ENT(0,3)
  SI (X > 0) ALORS
    DEBUT_SI
    X PREND_LA_VALEUR 1
    FIN_SI
  AFFICHER X
FIN_ALGORITHME
```

   D'après l'aide du logiciel Algbox, la commande `ALGOBOX_ALEA_ENT(0,3)` retourne un nombre entier aléatoire compris entre 0 et 3. Il y a 3 entier strictement posifitfs : 1,2 et 3. Ainsi, il y a 3 chance sur 4 que le nombre retourné soit strictement positif. Dans ce cas, le programme associe la valeur 1 à la variable X et sinon 0. Ainsi, effectivement, le programme simule une variable aléatoire X de Bernoulli de paramètre $\frac{3}{4}$.

2. Voici le programme qui simule 10 fois l'expérience de Bernoulli de paramètre $\frac{3}{4}$ est retourne la somme Y :

```
VARIABLES
k EST_DU_TYPE NOMBRE
X EST_DU_TYPE NOMBRE
Y EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  Y PREND_LA_VALEUR 0
  POUR k ALLANT_DE 1 A 10
    DEBUT_POUR
    X PREND_LA_VALEUR ALGOBOX_ALEA_ENT(0,3)
    SI (X>0) ALORS
      DEBUT_SI
      X PREND_LA_VALEUR 1
      FIN_SI
    Y PREND_LA_VALEUR Y + X
    FIN_POUR
  AFFICHER "Y = "
  AFFICHER Y
FIN_ALGORITHME
```

3. La variable aléatoire Y est la somme de dix variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de paramètre $p = \frac{3}{4}$. Notons que cette somme correspond au nombre de fois qu'on a obtenu 1 lors des 10 répétitions de l'expérience de Bernoulli. Ainsi, par définition, Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{3}{4}$.

AlgoBox : Deux commandes :

- Pour calculer le nombre $\binom{n}{k}$ avec algobox, on utilise la fonction :
  `ALGOBOX_COEFF_BINOMIAL(n,p)`
- Pour calculer le nombre x^k, on utilise la fonction :
  `pow(x, k)`

Exercice 2. Soit Y une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{3}{4}$.

1. Compléter le programme suivant pour qu'il affiche les différentes probabilités $P(Y = k)$.

```
VARIABLES
k EST_DU_TYPE NOMBRE
n EST_DU_TYPE NOMBRE
p EST_DU_TYPE NOMBRE
P EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  n PREND_LA_VALEUR 10
  p PREND_LA_VALEUR 3/4
  POUR k ALLANT_DE 0 A n
    DEBUT_POUR
    AFFICHER "\nP( Y = "
    AFFICHER k
    AFFICHER " ) = "
    P PREND_LA_VALEUR ALGOBOX_COEFF_BINOMIAL(n,k)*pow(p,k)*pow(1-p,n-k)
    AFFICHER P
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

2. Déterminons à l'aide d'un programme les nombres a et b tels que :
   - a est le plus entier tel que $P(Y \leq a) > 0.025$;
   - b est le plus petit entier tel que $P(Y \leq b) \geq 0.975$.

   C'est-à-dire, tels que $[\frac{a}{10}; \frac{b}{10}]$ soit un intervalle de fluctuation au seuil 95% de la fréquence $\frac{Y}{10}$. Notons que, par exemple, $P(Y \leq 3) = P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) + P(Y = 3)$. D'où, le programme suivant qui affiche les probabilités $P(Y \leq k)$ pour k allant de 0 à 10 :

```
VARIABLES
k EST_DU_TYPE NOMBRE
n EST_DU_TYPE NOMBRE
p EST_DU_TYPE NOMBRE
P EST_DU_TYPE NOMBRE
S EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  n PREND_LA_VALEUR 10
  p PREND_LA_VALEUR 3/4
  S PREND_LA_VALEUR 0
  POUR k ALLANT_DE 0 A n
    DEBUT_POUR
    P PREND_LA_VALEUR ALGOBOX_COEFF_BINOMIAL(n,k)*pow(p,k)*pow(1-p,n-k)
    TRACER_POINT (k,P)
    S PREND_LA_VALEUR S + P
    AFFICHER "\nP( Y <= "
    AFFICHER k
    AFFICHER ") = "
    AFFICHER S
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

   Le résultat affiché à l'écran : `P( Y <= 0) = 9.5367432e-7`

```
P( Y <= 1) = 0.000029563904
P( Y <= 2) = 0.000415802
P( Y <= 3) = 0.0035057068
P( Y <= 4) = 0.019727707
P( Y <= 5) = 0.078126907
P( Y <= 6) = 0.22412491
P( Y <= 7) = 0.4744072
```

```
P( Y <= 8) = 0.75597477
P( Y <= 9) = 0.94368649
P( Y <= 10) = 1
```

D'où $a = 5$ et $b = 10$ et l'intervalle de fluctuation au seuil 95% de la fréquence $\frac{Y}{10}$ est $[\frac{1}{2};\ 1]$.

Activité : Loi binomiale, échantillonnage (sujet A)

jeudi 12 mai 2016

Exercice 1 (simulation de la loi binomiale)**.**

1. On rappelle que la commande `Rand#` retourne un nombre aléatoire compris entre 0 et 1 et la commande `Int()` permet d'obtenir la partie entière d'un nombre.
   a) Que vaut `Int(0.2)`, `Int(0.99)`, `Int(1.1)` et `Int(1.3)` ?
   b) Quelle sont les valeurs que la commande `Int(Rand# + 0.3)` peut retourner ?
   c) Déterminer la probabilité que `Int(Rand# + 0.3)` soit égale à 1.
2. On considère le programme suivant :

Casio :
```
0→ X
For 1→N To 10
X+Int(Rand#+0.3)→X
Next
X
```

Texas Instrument :
```
0→ X
For(N,1,10)
X+int(rand+0.3)→X
End
Disp X
```

   a) Tester le programme. Quelle est la valeur affichée ?
   b) Justifier que X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
3. Écrire un programme qui permet de simuler une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0.5$.

Exercice 2. On considère une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = 0.2$.
Dans cet exercice, tous les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

1. Déterminer l'espérance et l'écart type de X.
2. À l'aide de la calculatrice, déterminer $\mathbb{P}(X \leq 12)$ et $\mathbb{P}(X \leq 5)$.
3. Justifier que $\mathbb{P}(6 \leq X \leq 12) = \mathbb{P}(X \leq 12) - \mathbb{P}(X \leq 5)$ et en déduire cette probabilité.
4. Trouver le plus petit entier b tel que $\mathbb{P}(X \leq b) \geq 97.5\%$.
5. Trouver le plus petit entier a tel que $\mathbb{P}(X \leq a) > 2.5\%$.
6. En déduire que la probabilité que X soit compris entre 3 et 13 est supérieure à 95%.
7. On pose $F = \frac{X}{40}$ la fréquence, à l'aide de la question précédente déterminer un intervalle J de telle sorte que la probabilité que la fréquence F soit dans cet intervalle J soit supérieure à 95%.
8. En seconde, vous avez vu que lorsque $n \geq 30$, un intervalle de fluctuation au seuil de 95% de la proportion $p = 0.2$ pour un échantillon de taille $n = 40$ est

$$I = [p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}]$$

   a) Déterminer I.
   b) Comparer les deux intervalles I et J.
   c) En déduire la signification de l'expression « au seuil de 95% » dans la définition de l'intervalle de fluctuation.

Exercice 3. Un graphologue prétend être capable de déterminer le sexe d'une personne d'après son écriture dans 90% des cas.
Lisa, qui en doute, lui soumet 20 exemples d'écriture. Elle reconnaîtra sa compétence s'il réussit au moins 90% des identifications du sexe, soit au moins 18 sur les 20. Dans le cas contraire, elle le considérera comme menteur.

1. Quelle est la probabilité :
   a) que Lisa accepte l'affirmation du graphologue alors qu'il s'est prononcé 20 fois au hasard ?
   b) que Lisa rejette l'affirmation alors qu'elle est totalement fondée ? Quel inconvénient présente le test de Lisa ?
2. Sur quel nombre N (minimal) d'identifications réussies Lisa aurait-elle pu se fixer pour être en mesure de rejeter l'affirmation du graphologue avec un risque de se tromper inférieur à 4% ? Quel conseil pouvez-vous donner à Lisa pour que son test prenne en compte le hasard ?

Exercice 4.* Une variable aléatoire suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n;\ p)$.

1. Montrer que quel que soit n, la variance est maximale lorsque $p = \frac{1}{2}$.
2. Si son espérance vaut 0.4 et son écart type 0.6, déterminer n et p.

Activité : Loi binomiale, échantillonnage (sujet B)

jeudi 12 mai 2016

Exercice 1 (simulation de la loi binomiale)**.**

1. On rappelle que la commande `Rand#` retourne un nombre aléatoire compris entre 0 et 1 et la commande `Int()` permet d'obtenir la partie entière d'un nombre.
   a) Que vaut `Int(0.1)`, `Int(0.989)`, `Int(1.05)` et `Int(1.2)` ?
   b) Quelle sont les valeurs que la commande `Int(Rand# + 0.4)` peut retourner ?
   c) Déterminer la probabilité que `Int(Rand# + 0.4)` soit égale à 1.
2. On considère le programme suivant :

Casio :
```
0→ X
For 1→N To 10
X+Int(Rand#+0.4)→X
Next
X
```

Texas Instrument :
```
0→ X
For(N,1,10)
X+int(rand+0.4)→X
End
Disp X
```

   a) Tester le programme. Quelle est la valeur affichée ?
   b) Justifier que X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
3. Écrire un programme qui permet de simuler une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0.4$.

Exercice 2. On considère une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = 0.8$.
Dans cet exercice, tous les résultats seront arrondis à 10^{-3} *près.*

1. Déterminer l'espérance et l'écart type de X.
2. À l'aide de la calculatrice, déterminer $\mathbb{P}(X \leq 36)$ et $\mathbb{P}(X \leq 29)$.
3. Justifier que $\mathbb{P}(30 \leq X \leq 36) = \mathbb{P}(X \leq 36) - \mathbb{P}(X \leq 29)$ et en déduire cette probabilité.
4. Trouver le plus petit entier b tel que $\mathbb{P}(X \leq b) \geq 97.5\%$.
5. Trouver le plus petit entier a tel que $\mathbb{P}(X \leq a) > 2.5\%$.
6. En déduire que la probabilité que X soit compris entre 26 et 37 est supérieure à 95%.
7. On pose $F = \frac{X}{40}$ la fréquence, à l'aide de la question précédente déterminer un intervalle J de telle sorte que la probabilité que la fréquence F soit dans cet intervalle J soit supérieure à 95%.
8. En seconde, vous avez vu que lorsque $n \geq 30$, un intervalle de fluctuation au seuil de 95% de la proportion $p = 0.8$ pour un échantillon de taille $n = 40$ est

$$I = [p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}]$$

   a) Déterminer I.
   b) Comparer les deux intervalles I et J.
   c) En déduire la signification de l'expression « au seuil de 95% » dans la définition de l'intervalle de fluctuation.

Exercice 3. Un graphologue prétend être capable de déterminer le sexe d'une personne d'après son écriture dans 90% des cas.
Lisa, qui en doute, lui soumet 20 exemples d'écriture. Elle reconnaîtra sa compétence s'il réussit au moins 90% des identifications du sexe, soit au moins 18 sur les 20. Dans le cas contraire, elle le considérera comme menteur.

1. Quelle est la probabilité :
   a) que Lisa accepte l'affirmation du graphologue alors qu'il s'est prononcé 20 fois au hasard ?
   b) que Lisa rejette l'affirmation alors qu'elle est totalement fondée ? Quel inconvénient présente le test de Lisa ?
2. Sur quel nombre N (minimal) d'identifications réussies Lisa aurait-elle pu se fixer pour être en mesure de rejeter l'affirmation du graphologue avec un risque de se tromper inférieur à 4% ? Quel conseil pouvez-vous donner à Lisa pour que son test prenne en compte le hasard ?

Exercice 4.* Une variable aléatoire suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n;\ p)$.

1. Montrer que quel que soit n, la variance est maximale lorsque $p = \frac{1}{2}$.
2. Si son espérance vaut 0.4 et son écart type 0.6, déterminer n et p.

Activité : Loi binomiale, échantillonnage (sujet A)

corrigé

Exercice 1 (simulation de la loi binomiale)**.**

1. On rappelle que la commande `Rand#` retourne un nombre aléatoire compris entre 0 et 1 et la commande `Int()` permet d'obtenir la partie entière d'un nombre.
   a) On a `Int(0.2) = 0`, `Int(0.99) = 0`, `Int(1.1) = 1` et `Int(1.3) = 1`.
   b) On note que :
   $$0 \leq \texttt{Rand\#} < 1$$
   $$0.3 \leq \texttt{Rand\#} + 0.3 < 1.3$$
   $$\texttt{Int(Rand\# + 0.3)} = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq \texttt{Rand\#} < 0.7 \\ 1 & \text{si } 0.7 \leq \texttt{Rand\#} < 1 \end{cases}$$
   Donc la commande `Int(Rand# + 0.3)` peut retourner les valeurs 0 et 1 uniquement.
   c) De la question précédente, on déduit que la probabilité que `Int(Rand# + 0.3)` soit égale à 1 est égale à $\mathbb{P}(0.7 \leq \texttt{Rand\#} < 1) = 1 - 0.7 = 0.3$.
2. On considère le programme suivant :

   Casio :
   ```
   0→ X
   For 1→N To 10
   X+Int(Rand#+0.3)→X
   Next
   X
   ```
   Texas Instrument :
   ```
   0→ X
   For(N,1,10)
   X+int(rand+0.3)→X
   End
   Disp X
   ```
   a) Le programme affiche aléatoirement un nombre entier compris entre 0 et 10 inclus.
   b) Après execution du programme, X correspond au nombre de fois que la commande `Int(Rand#+0.3)` vaut 1. Nous sommes donc bien dans le cadre d'un schéma de Bernoulli, représenté par la commande `Int(Rand#+0.3)`, qu'on répète 10 fois de manière identique et indépendante. Ainsi, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0.3$.
3. Pour simuler une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0.5$, on remplace dans le programme précédent, 10 par 5 et 0.3 par 0.5 tout simplement.

Exercice 2. On considère une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = 0.2$.
Dans cet exercice, tous les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

1. Alors, $\mathbb{E}(X) = n\,p = 40 \times 0.2 = 8$ et $\sigma(X) = \sqrt{n\ p\ (1-p)} = \sqrt{40 \times 0.2 \times 0.8} == \frac{4\sqrt{10}}{5} \simeq 2.53$.
2. À l'aide de la calculatrice, on a $\mathbb{P}(X \leq 12) = \text{Bcd}(12, 40, 0.2) \simeq 0.957$ et $\mathbb{P}(X \leq 5) \simeq 0.161$.
3. On note que l'événement $(X \leq 12)$ est égale à l'union des événements incompatibles $(X \leq 5)$ et $(6 \leq X \leq 12)$, d'où
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq 5) + \mathbb{P}(6 \leq X \leq 12) &= \mathbb{P}(X \leq 12) \\ \mathbb{P}(6 \leq X \leq 12) &= \mathbb{P}(X \leq 12) - \mathbb{P}(X \leq 5) \\ &\simeq 0.957 - 0.161 \simeq 0.796 \end{aligned}$$

4. En effectuant une table des probabilités $\mathbb{P}(X \leq k$ pour k allant de 0 à 40, on trouve que le plus petit entier b tel que $\mathbb{P}(X \leq b) \geq 97.5\%$ est $b = 13$.
5. De même, on trouve que le plus petit entier a tel que $\mathbb{P}(X \leq a) > 2.5\%$ est $a = 3$.
6. Par définition de a, on a que $\mathbb{P}(X \leq a - 1) \leq 2.5\%$, d'où

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq a-1) &\leq 2.5\% \\ -\mathbb{P}(X \leq a-1) &\geq -2.5\% \\ \mathbb{P}(X \leq b) - \mathbb{P}(X \leq a-1) &\geq \mathbb{P}(X \leq b) - 2.5\% \geq 97.5\% - 2.5\% \qquad \text{par définition de } b \\ \mathbb{P}(a \leq X \leq b) &\geq 95\% \end{aligned}$$

   Ainsi, la probabilité que X soit compris entre 3 et 13 est supérieure à 95%.
7. On pose $F = \frac{X}{40}$ la fréquence. On note que

$$\begin{aligned} 3 \leq X &\leq 13 \\ \frac{3}{40} \leq F &\leq \frac{13}{40} \qquad\qquad 0.075 \leq F \leq 0.325 \end{aligned}$$

   Ainsi, d'après la question précédente la probabilité que la fréquence F soit dans cet intervalle $J = [0.075;\ 0.325]$ est supérieure à 95%.
8. En seconde, vous avez vu que lorsque $n \geq 30$, un intervalle de fluctuation au seuil de 95% de la proportion $p = 0.2$ pour un échantillon de taille $n = 40$ est

$$I = [p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}]$$

   a) Ici, $I = [0.2 - \frac{1}{\sqrt{40}};\ 0.2 + \frac{1}{\sqrt{40}}] \simeq [0.042;\ 0.358]$.
   b) Comme $0.075 \leq 0.042$ et $0.325 \leq 0.358$, on déduit que l'intervalles J est inclus dans l'intervalle I.
   c) On en déduit que
$$P(F \in I) \geq P(F \in J) \geq 95\%$$
   Ainsi, l'expression « au seuil de 95% » dans la définition de l'intervalle de fluctuation, signifie qu'il y a au moins 95% de chances que la fréquence F observée dans un échantillon donné soit dans l'intervalle de fluctuation I.

Exercice 3. Un graphologue prétend être capable de déterminer le sexe d'une personne d'après son écriture dans 90% des cas.
Lisa, qui en doute, lui soumet 20 exemples d'écriture. Elle reconnaîtra sa compétence s'il réussit au moins 90% des identifications du sexe, soit au moins 18 sur les 20. Dans le cas contraire, elle le considérera comme menteur.

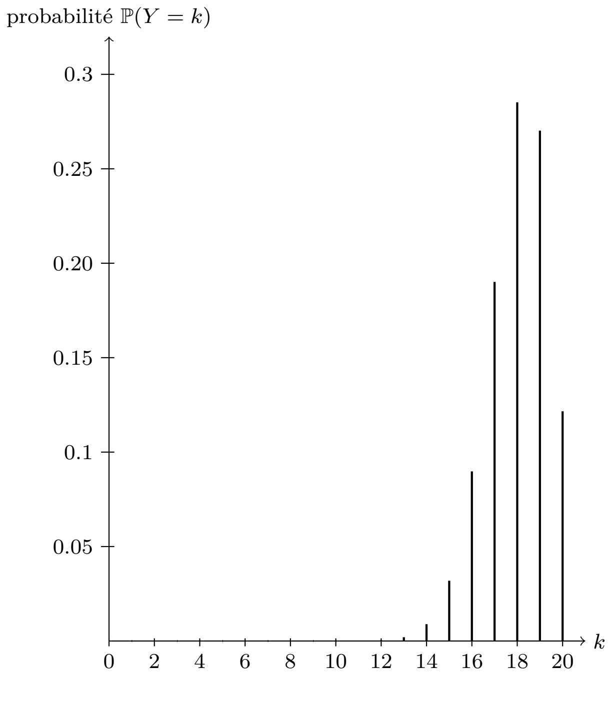
1. a) Supposons que le graphologue réponde au hasard et indépendamment pour chacun des 20 textes. Notons X le nombre réponses justes. Alors par hypothèse, la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0.5$. Lisa accepte l'affirmation du graphologue lorsqu'il répond correctement au moins 18 fois, c'est-à-dire lorsque l'événement $X \geq 18$ se réalise. Or,

$$\mathbb{P}(X \geq 18) = \mathbb{P}(X = 18) + \mathbb{P}(X = 19) + \mathbb{P}(X = 20)$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geq 18) &= \mathbb{P}(X=18)+\mathbb{P}(X=19)+\mathbb{P}(X=20) \\
&= \binom{20}{18}(\frac{1}{2})^{18}(\frac{1}{2})^{2}+\binom{20}{19}(\frac{1}{2})^{19}(\frac{1}{2})+\binom{20}{20}(\frac{1}{2})^{20} \\
&= \left(\binom{20}{18}+\binom{20}{19}+1\right)\frac{1}{2^{20}} \\
&= \frac{190+20+1}{2^{20}} \\
&= \frac{211}{1\,048\,576} \\
&\simeq 2\times 10^{-4}
\end{aligned}$$

D'où, la probabilité que Lisa accepte l'affirmation du graphologue est de 0,02%.
Remarque : On aurait aussi pu calculer $\mathbb{P}(X \geq 18) = 1-\mathbb{P}(X<18) = 1-\mathbb{P}(X \leq 17)$ en utilisant la commande Binomial Cumulative Distribution de la calculatrice.

b) On suppose maintenant que le graphologue dit vrai. On note Y la variable aléatoire correspondant au nombre de réponses justes. Encore une fois, Y suit une loi binomiale de paramètres $n=20$ et $p=0.9$.
Lisa rejette l'affirmation lorsque l'événement $Y<18$ se produit et $\mathbb{P}(Y<18)=\mathbb{P}(Y \leq 17) \simeq 0.32 = 32\%$ à l'aide la calculatrice. Ainsi, si le graphologue dit vrai, la probabilité que Lisa rejette son affirmation après l'expertise des 20 exemples d'écriture est de 32%. Cette probabilité est conséquente ! Il y a presque une chance sur trois de rejette l'hypothèse qui est vraie.
L'inconvénient de la méthode de Lisa est de ne pas assez prendre en compte la fluctuation du nombre de bonnes réponses.



Le graphologue pourrait très bien réussir moins de 18 fois sur les 20.

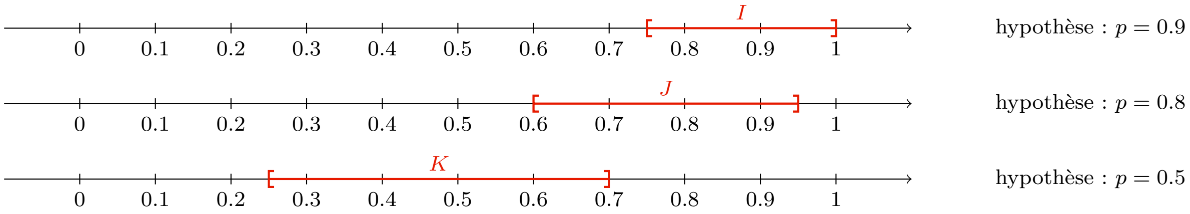
2. À l'aide d'une table, on note que $\mathbb{P}(Y \leq 15) \simeq 3.19\%$ et $\mathbb{P}(Y \leq 16) \simeq 8.98\%$. Ainsi, le nombre minimal d'identifications réussies que Lisa devrait se fixer pour être en mesure de rejeter l'affirmation du graphologue avec un risque de se tromper inférieur à 4% est $N=15$.
Lisa peut modifier son test en acceptant l'affirmation lorsque le graphologue réussi plus de 15 fois sur les 20.

Remarque :

Déterminons les intervalles de fluctuation sous les hypothèses $p = 0.9$, $p = 0.8$ et $p = 0.5$ associés à un échantillon de taille 20 :

- Sous l'hypothèse $p = 0.9$, l'intervalle de fluctuation au seuil 95% pour un échantillon de taille 20 est $I = [\frac{15}{20}; 1] = [0.75; 1]$.
- Sous l'hypothèse $p = 0.8$, l'intervalle de fluctuation au seuil 95% pour un échantillon de taille 20 est $J = [\frac{12}{20};\ \frac{19}{20}] = [0.6; 0.95]$.
- Sous l'hypothèse $p = 5$, l'intervalle de fluctuation associé est $K = [\frac{5}{20};\ \frac{14}{20}] = [0.25; 0.7]$.

Voici une illustration graphique des trois intervalles :



On note que la différence entre les deux intervalles de fluctuation I et J est relativement faible, en d'autres termes l'intervalle intersection $I \cap J = [0.75; 0.95]$ est relativement conséquence. D'autre part, avec un échantillon de taille 20, si la fréquence tombe dans l'intervalle $I \cap J$, on ne peut ni rejeter l'hypothèse $p = 0.8$ ni l'hypothèse $p = 0.9$ avec un risque de 5% d'erreur. Par contre, l'intervalle K est disjoint de l'intervalle I. Sur un échantillon de taille 20, on peut discriminer l'hypothèse $p = 0.9$ ou $p = 0.5$ ou les deux avec un risque de 5% d'erreur.

Si on voulait faire de même, avec les hypothèses $p = 0.9$ et $p = 0.8$, il suffit d'augmenter la taille de l'échantillon pour que les intervalles de fluctuation I et J soient disjoints. D'après l'avant dernière propriété, si $n \geq 30$, alors

$$J = [0.8 - \frac{1}{\sqrt{n}}; 0.8 + \frac{1}{\sqrt{n}}] \qquad \text{et} \qquad I = [0.9 - \frac{1}{\sqrt{n}}; 0.9 + \frac{1}{\sqrt{n}}]$$

On note que I et J sont disjoints si et seulement si $0.8 + \frac{1}{\sqrt{n}} < 0.9 - \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$\frac{2}{\sqrt{n}} < 0.9 - 0.8 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2 < 0.1\sqrt{n} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 20 < \sqrt{n}$$

C'est-à-dire, en élevant au carré, comme n est positif, $20^2 = 400 < n$.
Donc, pour discriminer au moins une des deux hypothèses $p = 0.9$ ou $p = 0.8$ avec un risque de 5% d'erreur environ, il faut considérer un échantillon de taille supérieur à 400.

Activité : Loi binomiale, échantillonnage (sujet B)

corrigé

Exercice 1 (simulation de la loi binomiale)**.**

1. On rappelle que la commande `Rand#` retourne un nombre aléatoire compris entre 0 et 1 et la commande `Int()` permet d'obtenir la partie entière d'un nombre.
   a) On a `Int(0.1) = 0`, `Int(0.989) = 0`, `Int(1.05) = 1` et `Int(1.2) = 1`.
   b) On note que :
   $$\begin{aligned} &0 \le \texttt{Rand\#} < 1 \\ &0.4 \le \texttt{Rand\#} + 0.4 < 1.4 \\ &\texttt{Int(Rand\# + 0.4)} = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le \texttt{Rand\#} < 0.6 \\ 1 & \text{si } 0.6 \le \texttt{Rand\#} < 1 \end{cases} \end{aligned}$$
   Donc la commande `Int(Rand# + 0.4)` peut retourner les valeurs 0 et 1 uniquement.
   c) De la question précédente, on déduit que la probabilité que `Int(Rand# + 0.4)` soit égale à 1 est égale à $\mathbb{P}(0.7 \le \texttt{Rand\#} < 1) = 1 - 0.6 = 0.4$.
2. On considère le programme suivant :

   Casio :
```
0→ X
For 1→N To 10
X+Int(Rand#+0.4)→X
Next
X
```
   Texas Instrument :
```
0→ X
For(N,1,10)
X+int(rand+0.4)→X
End
Disp X
```
   a) Le programme affiche aléatoirement un nombre entier compris entre 0 et 10 inclus.
   b) Après execution du programme, X correspond au nombre de fois que la commande `Int(Rand#+0.4)` vaut 1. Nous sommes donc bien dans le cadre d'un schéma de Bernoulli, représenté par la commande `Int(Rand#+0.4)`, qu'on répète 10 fois de manière identique et indépendante. Ainsi, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0.4$.
3. Pour simuler une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0.4$, on remplace dans le programme précédent, 10 par 6.

Exercice 2. On considère une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = 0.8$.
Dans cet exercice, tous les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

1. Alors, $\mathbb{E}(X) = n\,p = 40 \times 0.8 = 32$ et $\sigma(X) = \sqrt{n\ p\ (1-p)} = \sqrt{40 \times 0.2 \times 0.8} = \frac{4\sqrt{10}}{5} \simeq 2.53$.
2. À l'aide de la calculatrice, on a $\mathbb{P}(X \le 36) = \text{Bcd}(36, 40, 0.8) \simeq 0.972$ et $\mathbb{P}(X \le 29) \simeq 0.161$.
3. On note que l'événement $(X \le 36)$ est égale à l'union des événements incompatibles $(X \le 29)$ et $(30 \le X \le 36)$, d'où
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \le 29) + \mathbb{P}(30 \le X \le 36) &= \mathbb{P}(X \le 36) \\ \mathbb{P}(30 \le X \le 36) &= \mathbb{P}(X \le 36) - \mathbb{P}(X \le 29) \\ &\simeq 0.972 - 0.161 \simeq 0.811 \end{aligned}$$

4. En effectuant une table des probabilités $\mathbb{P}(X \leq k$ pour k allant de 0 à 40, on trouve que le plus petit entier b tel que $\mathbb{P}(X \leq b) \geq 97.5\%$ est $b = 37$.
5. De même, on trouve que le plus petit entier a tel que $\mathbb{P}(X \leq a) > 2.5\%$ est $a = 27$.
6. Par définition de a, on a que $\mathbb{P}(X \leq a-1) \leq 2.5\%$, d'où

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq a-1) &\leq 2.5\% \\ -\mathbb{P}(X \leq a-1) &\geq -2.5\% \\ \mathbb{P}(X \leq b) - \mathbb{P}(X \leq a-1) &\geq \mathbb{P}(X \leq b) - 2.5\% \geq 97.5\% - 2.5\% && \text{par définition de } b \\ \mathbb{P}(a \leq X \leq b) &\geq 95\% \end{aligned}$$

Ainsi, la probabilité que X soit compris entre 27 et 37 est supérieure à 95%.

7. On pose $F = \frac{X}{40}$ la fréquence. On note que

$$\begin{aligned} 27 \leq X \leq 37 \\ \frac{27}{40} \leq F \leq \frac{37}{40} && 0.675 \leq F \leq 0.925 \end{aligned}$$

Ainsi, d'après la question précédente la probabilité que la fréquence F soit dans cet intervalle $J = [0.675;\ 0.925]$ est supérieure à 95%.

8. En seconde, vous avez vu que lorsque $n \geq 30$, un intervalle de fluctuation au seuil de 95% de la proportion $p = 0.2$ pour un échantillon de taille $n = 40$ est

$$I = [p - \frac{1}{\sqrt{n}};\ p + \frac{1}{\sqrt{n}}]$$

a) Ici, $I = [0.8 - \frac{1}{\sqrt{40}};\ 0.8 + \frac{1}{\sqrt{40}}] \simeq [0.642;\ 0.958]$.

b) Comme $0.642 \leq 0.675$ et $0.925 \leq 0.958$, on déduit que l'intervalles J est inclus dans l'intervalle I.

c) On en déduit que

$$P(F \in I) \geq P(F \in J) \geq 95\%$$

Ainsi, l'expression « au seuil de 95% » dans la définition de l'intervalle de fluctuation, signifie qu'il y a au moins 95% de chances que la fréquence F observée dans un échantillon donné soit dans l'intervalle de fluctuation I.

Exercice 3. Un graphologue prétend être capable de déterminer le sexe d'une personne d'après son écriture dans 90% des cas.
Lisa, qui en doute, lui soumet 20 exemples d'écriture. Elle reconnaîtra sa compétence s'il réussit au moins 90% des identifications du sexe, soit au moins 18 sur les 20. Dans le cas contraire, elle le considérera comme menteur.

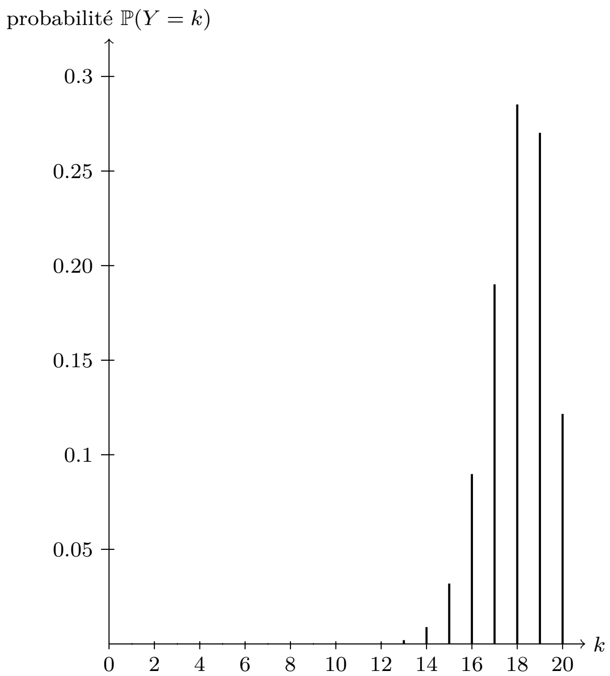
1. a) Supposons que le graphologue réponde au hasard et indépendamment pour chacun des 20 textes. Notons X le nombre réponses justes. Alors par hypothèse, la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0.5$. Lisa accepte l'affirmation du graphologue lorsqu'il répond correctement au moins 18 fois, c'est-à-dire lorsque l'événement $X \geq 18$ se réalise. Or,

$$\mathbb{P}(X \geq 18) = \mathbb{P}(X = 18) + \mathbb{P}(X = 19) + \mathbb{P}(X = 20)$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geq 18) &= \mathbb{P}(X=18)+\mathbb{P}(X=19)+\mathbb{P}(X=20) \\
&= \binom{20}{18}(\frac{1}{2})^{18}(\frac{1}{2})^2+\binom{20}{19}(\frac{1}{2})^{19}(\frac{1}{2})+\binom{20}{20}(\frac{1}{2})^{20} \\
&= \left(\binom{20}{18}+\binom{20}{19}+1\right)\frac{1}{2^{20}} \\
&= \frac{190+20+1}{2^{20}} \\
&= \frac{211}{1\,048\,576} \\
&\simeq 2\times 10^{-4}
\end{aligned}$$

D'où, la probabilité que Lisa accepte l'affirmation du graphologue est de 0,02%.
Remarque : On aurait aussi pu calculer $\mathbb{P}(X \geq 18) = 1 - \mathbb{P}(X < 18) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 17)$ en utilisant la commande Binomial Cumulative Distribution de la calculatrice.

b) On suppose maintenant que le graphologue dit vrai. On note Y la variable aléatoire correspondant au nombre de réponses justes. Encore une fois, Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0.9$.
Lisa rejette l'affirmation lorsque l'événement $Y < 18$ se produit et $\mathbb{P}(Y < 18) = \mathbb{P}(Y \leq 17) \simeq 0.32 = 32\%$ à l'aide la calculatrice. Ainsi, si le graphologue dit vrai, la probabilité que Lisa rejette son affirmation après l'expertise des 20 exemples d'écriture est de 32%. Cette probabilité est conséquente ! Il y a presque une chance sur trois de rejette l'hypothèse qui est vraie.
L'inconvénient de la méthode de Lisa est de ne pas assez prendre en compte la fluctuation du nombre de bonnes réponses.



Le graphologue pourrait très bien réussir moins de 18 fois sur les 20.

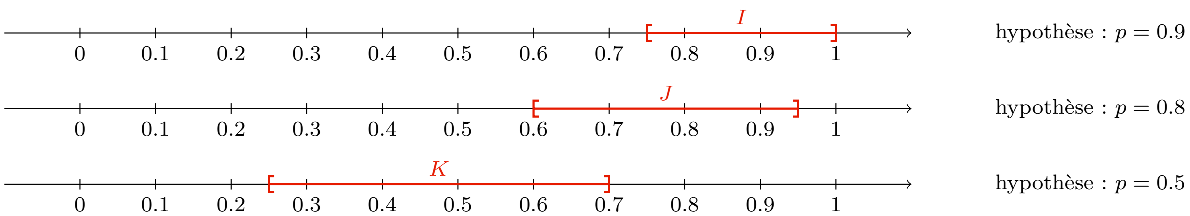
2. À l'aide d'une table, on note que $\mathbb{P}(Y \leq 15) \simeq 3.19\%$ et $\mathbb{P}(Y \leq 16) \simeq 8.98\%$. Ainsi, le nombre minimal d'identifications réussies que Lisa devrait se fixer pour être en mesure de rejeter l'affirmation du graphologue avec un risque de se tromper inférieur à 4% est $N = 15$.
Lisa peut modifier son test en acceptant l'affirmation lorsque le graphologue réussi plus de 15 fois sur les 20.

Remarque :

Déterminons les intervalles de fluctuation sous les hypothèses $p = 0.9$, $p = 0.8$ et $p = 0.5$ associés à un échantillon de taille 20 :

- Sous l'hypothèse $p = 0.9$, l'intervalle de fluctuation au seuil 95% pour un échantillon de taille 20 est $I = [\frac{15}{20}; 1] = [0.75; 1]$.
- Sous l'hypothèse $p = 0.8$, l'intervalle de fluctuation au seuil 95% pour un échantillon de taille 20 est $J = [\frac{12}{20};\ \frac{19}{20}] = [0.6; 0.95]$.
- Sous l'hypothèse $p = 5$, l'intervalle de fluctuation associé est $K = [\frac{5}{20};\ \frac{14}{20}] = [0.25; 0.7]$.

Voici une illustration graphique des trois intervalles :



On note que la différence entre les deux intervalles de fluctuation I et J est relativement faible, en d'autres termes l'intervalle intersection $I \cap J = [0.75; 0.95]$ est relativement conséquence. D'autre part, avec un échantillon de taille 20, si la fréquence tombe dans l'intervalle $I \cap J$, on ne peut ni rejeter l'hypothèse $p = 0.8$ ni l'hypothèse $p = 0.9$ avec un risque de 5% d'erreur. Par contre, l'intervalle K est disjoint de l'intervalle I. Sur un échantillon de taille 20, on peut discriminer l'hypothèse $p = 0.9$ ou $p = 0.5$ ou les deux avec un risque de 5% d'erreur.

Si on voulait faire de même, avec les hypothèses $p = 0.9$ et $p = 0.8$, il suffit d'augmenter la taille de l'échantillon pour que les intervalles de fluctuation I et J soient disjoints. D'après l'avant dernière propriété, si $n \geq 30$, alors

$$J = [0.8 - \frac{1}{\sqrt{n}}; 0.8 + \frac{1}{\sqrt{n}}] \qquad \text{et} \qquad I = [0.9 - \frac{1}{\sqrt{n}}; 0.9 + \frac{1}{\sqrt{n}}]$$

On note que I et J sont disjoints si et seulement si $0.8 + \frac{1}{\sqrt{n}} < 0.9 - \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$\frac{2}{\sqrt{n}} < 0.9 - 0.8 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2 < 0.1\sqrt{n} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 20 < \sqrt{n}$$

C'est-à-dire, en élevant au carré, comme n est positif, $20^2 = 400 < n$.
Donc, pour discriminer au moins une des deux hypothèses $p = 0.9$ ou $p = 0.8$ avec un risque de 5% d'erreur environ, il faut considérer un échantillon de taille supérieur à 400.